

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

On raisonne comme dans le cours. Supposons que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. On peut donc écrire $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$ avec a ou b impair (sinon on peut simplifier la fraction). Alors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 2b^3 \quad \Rightarrow \quad a^3 \text{ est pair} \quad \Rightarrow \quad a \text{ est pair,}$$

où, pour la dernière implication, on utilise le même argument que dans le cours: si a était impair, disons $a = 2k + 1$, alors $a^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(\dots) + 1$ serait aussi impair. Donc a est forcément pair. Il suit que $a = 2c$, pour un $c \in \mathbb{Z}$ et on trouve donc l'équation

$$(2c)^3 = 2b^3 \quad \Rightarrow \quad 8c^3 = 2b^3 \quad \Rightarrow \quad 4c^3 = b^3 \quad \Rightarrow \quad b^3 \text{ est pair} \quad \Rightarrow \quad b \text{ est pair,}$$

où l'on a utilisé le même argument qu'avant dans la dernière implication. C'est absurde, car on a supposé que soit a soit b était impair. On conclut que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

La preuve pour $\sqrt{3}$ est similaire. On suppose que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, et on écrit $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec a ou b non-divisible par 3. Par le même argument que plus haut, on trouve que $a^2 = 3b^2$, donc a^2 est un multiple de 3, et il suit que a est lui aussi un multiple de 3: sinon, a s'écrit comme $3k + 1$ ou $3k + 2$, et on vérifie que ces expressions élevées au carré ne donnent pas de multiple de 3. On continue sur les mêmes lignes: on trouve que $a = 3c$, puis en remplaçant dans l'équation on trouve que b^2 doit lui aussi être un multiple de 3. C'est à nouveau absurde (on avait supposé que soit a soit b n'était pas un multiple de 3), et ainsi $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Pour montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$. Comme $D \subseteq \mathbb{R}$ est borné, $x = \sup D$ existe dans $\mathbb{R}$. La même preuve que la Prop 1.2 vue en cours montre que $x^2 = 2$. Comme x est positif, on a $x = \sqrt{2}$.

(On aurait aussi pu utiliser directement l'ensemble D de la Prop 1.2 et le fait que $\mathbb{R}$ s'obtient à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant tous les sup et les inf des ensembles bornés; donc $x = \sup D \in \mathbb{R}$, qui vaut $\sqrt{2}$ car positif).

Solution 2.

Pour $\sup A$, q est bien un majorant de A (puisque $A =]p, q]$, donc $a \leq q$ pour tout $a \in A$, par définition de l'intervalle). Est-ce le plus petit? Si $s < q$, alors $a = q - \frac{q-s}{2}$ est dans A (car $a \leq q$), mais $a > q - (q - s) = s$, et donc s n'est pas un majorant de A . Donc q est bien le plus petit majorant, et ainsi $q = \sup A$.

Pour $\inf A$, c'est similaire: p est un minorant, et si $t > p$, alors $a = p + \frac{t-p}{2}$ est élément de A plus petit que t . Donc t n'est pas un minorant, et p est donc bien le plus grand des minorants, aka $\inf A$.

Comme $\sup A = q \in A$, $\max A$ existe et vaut q . Comme $\inf A = p \notin A$, on ne peut pas avoir $\min A = \inf A$ (car $\min A$ est forcément un élément de A). Par conséquent, $\min A$ n'existe pas.

Solution 3.

- (a) L'ensemble est borné, $\sup A = \max A = \sqrt{2}$, $\inf A = -1$ et $\min A$ n'existe pas.
- (b) L'ensemble est minoré mais pas majoré. On a $\sup A = +\infty$ (et donc n'existe pas dans $\mathbb{R}$), $\inf A = \sqrt{3}$ et $\max A$ et $\min A$ n'existent pas.
- (c) On a $|2x - 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$, et donc $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$. Donc l'ensemble est borné, $\sup A = \max A = 1$, et $\inf A = \min A = 0$.
- (d) L'ensemble A est borné: majoré par 1 (puisque $\frac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et minoré par 0 (car $\frac{1}{n} > 0$). Comme 1 est un majorant qui est dans A , on a $\max A = 1$, et donc $\sup A = \max A = 1$. Pour $\inf A$, on a $\inf A = 0$: On sait déjà que 0 est un minorant, mais est-ce le plus grand? Si $x > 0$, alors on choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{x}$. Si $a = \frac{1}{n}$, alors $a < x$, et x ne minore donc pas A . Donc 0 est bien le plus grand minorant, d'où $\inf A = 0$. Comme $0 \notin A$, $\min A$ n'existe pas.
- (e) On a $A = \{0\}$. Il est donc borné, et $\sup A = \max A = \inf A = \min A = 0$.
- (f) L'ensemble est borné: majoré par $\frac{1}{2}$ (puisque $\frac{(-1)^n}{n} \leq 0 \leq \frac{1}{n}$ si n est impair, et $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ si n est pair) et minoré par -1 (car $\frac{(-1)^n}{n} \geq 0 \geq -1$ si n est pair, et $\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \geq -1$ si n est impair). Comme $\frac{1}{2} \in A$, on a $\max A = \frac{1}{2} = \sup A$, et comme $-1 \in A$, on a $\min A = -1 = \inf A$.
- (g) L'ensemble est borné: majoré par 1 (puisque $n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$) et minoré par 0 (car $\frac{n}{n+1} \geq 0$). Comme $0 \in A$, on a $\min A = \inf A = 0$. Pour $\sup A$, il faut montrer que 1 est le plus petit majorant. Soit $s < 1$. On choisit $n \geq \frac{1}{1-s}$ et on pose $a = \frac{n}{n+1} \in A$. Alors
- $$a = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > s \quad \Leftrightarrow \quad 1 - s > \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{1-s} - 1$$
- Ainsi $a > s$, et 1 est donc bien le plus petit majorant, d'où $\sup A = 1$. Finalement, comme $\frac{n}{n+1} < 1$ pour tout n , il suit que $\sup A = 1 \notin A$ et donc $\max A$ n'existe pas.
- (h) L'ensemble $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$ qui est non borné, et $\mathbb{Q}$ n'est donc pas borné non plus. On a $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$, tous les deux n'existent donc pas dans $\mathbb{R}$, et $\max A$ et $\min A$ n'existent pas.
- (i) L'ensemble est borné: majoré par $\sqrt{2}$ et minoré par $-\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ est-il le plus petit majorant? Si $s < \sqrt{2}$, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour trouver $q \in \mathbb{Q}$ avec $s < q < \sqrt{2}$. Comme $q \in A$, s n'est pas un majorant, et $\sqrt{2}$ est donc bien le plus petit, d'où $\sup A = \sqrt{2}$. On montre similairement que $\inf A = -\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sup A = \sqrt{2} \notin A$ et donc $\max A$ n'existe pas. Similairement, $\min A$ n'existe pas.

Solution 4.

- (a) $A = [-2, 0]$. (e) $A =]-\infty, -\sqrt[3]{3}]$.
 (b) $A = [-1, +\infty[$. (f) $A =]-\sqrt{3}, -1[\cup]1, \sqrt{3}[$. (Attention de bien traiter les cas où $x^2 - 2 > 0$ et où $x^2 - 2 < 0$.)
 (c) $A =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.
 (d) $A =]-3, -2] \cup [2, +\infty[$.

Solution 5.

- (a) Si $x = 0.\bar{9}$, alors $10x = 9.\bar{9} = 9 + 0.\bar{9} = 9 + x$. Donc $10x = 9 + x \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$.
 (b) On a $3.14159 = \frac{314159}{100000}$ et $55.\overline{612} = 55 + 0.\overline{612}$. Or si $x = 0.\overline{612}$, alors $1000x = 612.\overline{612} = 612 + 0.\overline{612} = 612 + x$. Donc $1000x = 612 + x \Rightarrow 999x = 612 \Rightarrow x = \frac{612}{999}$. Ainsi $55.\overline{612} = 55 + \frac{612}{999} = \frac{6173}{111}$.
 (c) Une division en colonne donne $\frac{8}{13} = 0.615384615\dots$. On suppose donc que $\frac{8}{13} = 0.\overline{615384}$. Et on le montre comme au point (b)!

Solution 6.

- (a) Vrai: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ (cela suit aussi directement du fait que $\mathbb{Q}$ est un corps !)
 (b) Faux: $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc $-\sqrt{2}$ aussi, mais $0 = \sqrt{2} + (-\sqrt{2})$ est rationnel.
 (c) Vrai: Pour $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, posons $c = a + b$. Si $c \in \mathbb{Q}$, alors $c + (-a)$ est aussi dans $\mathbb{Q}$ (par le point (a)), donc $b = c + (-a) \in \mathbb{Q}$, une contradiction. Cela force $c \notin \mathbb{Q}$ i.e., $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 (d) Faux: $]0, 1[$ est majoré, mais n'a pas de max.
 (e) Vrai: C'est un théorème du cours.
 (f) Vrai: Si A contient ≥ 2 éléments, on trouve $a, b \in A$ avec $a < b$. Donc $\inf A \leq a < b \leq \sup A$, d'où $\inf A \neq \sup A$. Donc A n'a qu'un élément.

Solution 7.

- $i^7 = -i = 0 - 1 \cdot i$.
- $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$.
- $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.
- $(1 + i)^2 = 2i = 0 + 2i$.
- $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4 = -4 + 0i$.
- On a $(1 + \sqrt{3}i)^3 = 1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 = 1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i = -8$, d'où $(1 + \sqrt{3}i)^6 = (-8)^2 = 64 = 64 + 0i$.