

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

On a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{2, 4\}$, $E \setminus A = \{2, 4, 5\}$, $E \setminus B = \{1, 5\}$, $E \setminus (A \cup B) = \{5\}$, $E \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 4, 5\}$.

Solution 2.

- (a) On a $\emptyset^c = \{x \in X \mid x \notin \emptyset\} = X$ puisque $x \notin \emptyset$ est toujours vrai ($\emptyset$ est vide, et ne contient donc aucun élément), et $X^c = \{x \in X \mid x \notin X\} = \emptyset$, puisque les deux conditions $x \in X$ et $x \notin X$ sont en contradiction (et donc l'ensemble des x qui les vérifie est vide).
- (b) On a $(A^c)^c = \{x \in X \mid x \notin A^c\}$. Comme $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$, l'ensemble $(A^c)^c$ est donc formé des éléments de X qui ne vérifient pas la condition $x \notin A$, ce sont donc exactement les éléments de A . Ainsi $(A^c)^c = A$.
- (c) On montre la double inclusion: $\subseteq$ et $\supseteq$. Soit $x \in (A \cap B)^c$. Donc $x \notin A \cap B$, et donc soit $x \notin A$, soit $x \notin B$ soit les deux. Cela se traduit par $x \in A^c$ ou $x \in B^c$ ou les deux, i.e. $x \in A^c \cup B^c$. Donc $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Soit maintenant $x \in A^c \cup B^c$. Donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, i.e. x n'est pas dans A et dans B . Ainsi $x \notin A \cap B$, d'où $x \in (A \cap B)^c$. Cela montre $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cup B^c$, d'où $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. La seconde égalité se montre en prenant le complémentaire de chaque membre de la première égalité.

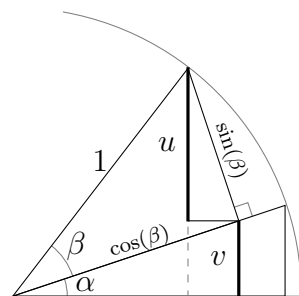
Solution 3.

- (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{0, -1, -2, \dots\}$.
- (b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\}$, ou mieux $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$.
- (c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est impair}\}$, ou mieux $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$.
- (d) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \neq 4\} = \{3, 6, 9, 15, 18, 21, \dots\}$.

Solution 4.

- (a) On calcule l'aire de la figure de deux façons. Pour la première, on remarque que c'est un carré de côté $a + b$, donc son aire est $(a + b)^2$. Pour la seconde, il y a 4 triangles rectangles de côtés a, b et donc d'aire $\frac{ab}{2}$, et un carré de côté c , donc d'aire c^2 . Comme c'est la même aire dans les deux cas, on a l'équation $(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.
- (b) Dans un triangle rectangle d'hypoténuse 1, les côtés sont $a = \sin(x)$ et $b = \cos(x)$ où x est un angle. Par Pythagore, on a donc $a^2 + b^2 = 1$, i.e. $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.
- (c) On considère un triangle rectangle dont les deux petits côtés sont de longueur 1. Par Pythagore, l'hypoténuse est de longueur $\sqrt{2}$. En combinant deux de ces triangles, on obtient un carré, donc les angles non droits valent $\frac{\pi}{4}$. Il suit que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{côté}}{\text{hypoténuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (d) Si on note u, v les côtés en gras, alors $\sin(\alpha + \beta) = u + v$. On remarque que $\sin(\alpha) = \frac{v}{\cos(\beta)}$, d'où $v = \sin(\alpha) \cos(\beta)$. De plus, l'angle adjacent à u est α , donc $\cos(\alpha) = \frac{u}{\sin(\beta)}$, d'où $u = \cos(\alpha) \sin(\beta)$.



Solution 5.

- (a) Si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (appliquer $g(\dots)$ des deux côtés), et donc $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Cela montre que f est injective. Pour la surjectivité de g , soit $x \in X$. On pose $y = f(x)$, et on a $g(y) = g(f(x)) = x$, donc x est l'image de g par y . Comme $x \in X$ était arbitraire, tous les x sont atteints, et g est donc surjective.
- (b) On peut prendre $X = \{1\}, Y = \{1, 2\}$ et f qui envoie $1 \mapsto 1$ et g qui envoie $1 \mapsto 1$ et $2 \mapsto 1$.

Solution 6.

- (a) $D = \mathbb{R}, I = \mathbb{R}$, la fonction est bijective donc on doit prendre $A = D = \mathbb{R}$, la réciproque est $\frac{1-x}{2}$.
- (b) $D = \mathbb{R}, I = \mathbb{R}$, la fonction est bijective donc on doit prendre $A = D = \mathbb{R}$, la réciproque est $\sqrt[n]{x}$.
- (c) $D = \mathbb{R}, I = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. La fonction n'est pas injective: $1^n = 1 = (-1)^n$ si n est pair. On peut restreindre la fonction à $A = \mathbb{R}_+$, elle devient alors bijective, de réciproque $\sqrt[n]{x}$. On aurait aussi pu choisir $A =]-\infty, 0]$; elle serait alors également bijective, de réciproque $-\sqrt[n]{x}$.
- (d) $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = I$. La fonction est bijective donc on doit prendre $A = D = \mathbb{R}^*$, la réciproque est $\frac{1}{x}$.
- (e) $D = \mathbb{R}, I =]-\infty, 1]$ (la fonction est maximale en $x = 0$). La fonction n'est pas injective: $1 - 1^2 = 0 = 1 - (-1)^2$. On peut restreindre la fonction à $A = \mathbb{R}_+$, elle devient alors bijective, de réciproque $\sqrt{1-x}$.
- (f) $D = \mathbb{R}, I = [-13, +\infty[$: En effet, on a $x^2 - 8x + 3 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 3 = (x-4)^2 - 13$, elle est donc minimale en $x = 4$ et de valeur minimale -13 . La fonction n'est pas injective: 3 et 5 sont tous deux envoyés sur -12 . On peut restreindre la fonction à $A = [4, +\infty[$, elle devient alors bijective. Pour sa réciproque on a $y = (x-4)^2 - 13 \Leftrightarrow (x-4)^2 = y + 13 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{y+13}$. Donc si on se restreint à $x \in [4, +\infty[$, sa réciproque est $4 + \sqrt{x+13}$.
- (g) $D = \mathbb{R}, I = [-1, 1]$. La fonction n'est pas injective: $\sin(2 \cdot 0) = 0 = \sin(2 \cdot \pi)$. $\sin$ est injective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on peut donc restreindre la fonction à $A = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, elle devient alors bijective, de réciproque $\frac{1}{2} \arcsin(x)$.
- (h) $D = \mathbb{R} \setminus \{\text{zéros de } \cos\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, I = \mathbb{R}$. La fonction n'est pas injective: $2 \tan(0) = 0 = 2 \tan(\pi)$. On peut restreindre la fonction à $A =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle devient alors bijective, de réciproque $\arctan(\frac{1}{2}x)$.

- (i) $D = \mathbb{R}, I = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ car $\frac{\pi}{4} \sin(x)$ prend des valeurs dans $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, et donc $\sin(\frac{\pi}{4} \sin(x))$ prend des valeurs dans $[\sin(-\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4})] = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. La fonction n'est pas injective: $\sin(\frac{\pi}{4} \sin(0)) = 0 = \sin(\frac{\pi}{4} \sin(\pi))$. On peut restreindre la fonction à $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, elle devient alors bijective, et a comme réciproque $\arcsin(\frac{4}{\pi} \arcsin(x))$.
- (j) $D = \mathbb{R}$ (car $x^2 + 1$ n'est jamais 0), $I =]0, 1]$ (car maximale en $x = 0$). La fonction n'est pas injective: -1 et 1 sont tout deux envoyés sur $\frac{1}{2}$. On peut restreindre la fonction à $A = \mathbb{R}_+$, elle devient alors bijective. Pour sa réciproque on a $y = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$. Donc si on se restreint à $x \in \mathbb{R}_+$, sa réciproque est $\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$.
- (k) $D = [-5, 5]$, car la fonction est bien définie si $25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 25 \geq x^2 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$. $I = [-1, 4]$, car $\sqrt{25 - x^2}$ est une valeur entre 0 et 5, donc $f(x)$ est entre -1 et 4. La fonction n'est pas injective: -5 et 5 sont tout deux envoyés sur -1 . On peut restreindre la fonction à $A = [0, 5]$, elle devient alors bijective. Pour sa réciproque on a $y = \sqrt{25 - x^2} - 1 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{25 - (y + 1)^2}$. Donc si on se restreint à $x \in [0, 5]$, sa réciproque est $\sqrt{25 - (x + 1)^2}$.
- (l) $D =]-\infty, 2]$, car $1 + \frac{1}{x-1}$ est bien défini si $x \leq 0$ et $\sqrt{4 - x^2}$ est définie si $4 - x^2 \geq 0$, donc si $0 \leq x \leq 2$. $I = [0, 2[$, car si $0 < x \leq 2$, $\sqrt{4 - x^2}$ prend des valeurs dans $[0, 2[$, et si $x \leq 0$, $1 + \frac{1}{x-1}$ prend des valeurs dans $[0, 1[$, donc n'ajoute pas de "nouveaux" éléments à l'image. La fonction n'est pas injective: 0 est envoyé sur $1 + \frac{1}{0-1} = 0$, et 2 sur $\sqrt{4 - 2^2} = 0$. On peut restreindre la fonction à $A =]0, 2]$, elle devient alors bijective, de réciproque $\sqrt{4 - x^2}$.

Solution 7.

- (a) Faux. Par exemple $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(1) = 2, f(2) = 1$ et $f(x) = x$ si $x \geq 3$ est une autre fonction bijective (il en existe une infinité indénombrable).
- (b) Vrai. Si $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ alors posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Alors $g(y_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g(y_2)$, donc $y_1 = y_2$ par injectivité de g . Donc $f(x_1) = y_1 = y_2 = f(x_2)$, d'où $x_1 = x_2$ par injectivité de f . Ainsi $g \circ f$ est injective.
- (c) Vrai. Si $z \in Z$, il existe $y \in Y$ tel que $g(y) = z$ par surjectivité de g , et il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$ par surjectivité de f . Donc $g \circ f(x) = z$, et $g \circ f$ est surjective.
- (d) Faux. La fonction constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 17$ est croissante (au sens large), mais pas injective.
- (e) Faux. La fonction constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -14$ est croissante (au sens large), mais pas surjective.
- (f) Vrai. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Dans le premier cas, on a $f(x_1) < f(x_2)$, contredisant que $f(x_1) = f(x_2)$. Dans le second cas, on a $f(x_1) > f(x_2)$, contredisant que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc on ne peut pas avoir $x_1 \neq x_2$, d'où $x_1 = x_2$, et f est injective.

(g) Faux. On peut par exemple considérer

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Elle n'est pas surjective, car $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En revanche elle est strictement croissante, car si $0 \leq x < y$, alors $f(x) = x + 1 < y + 1 = f(y)$, si $x < 0 \leq y$, alors $f(x) < 1$ et $f(y) \geq 1$, donc $f(x) < f(y)$, et si $x < y \leq 0$, on a $1 - x > 1 - y$ d'où $f(x) = \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-y} = f(y)$.

(On peut également simplement prendre $f(x) = e^x$, mais on a besoin d'outils plus avancés vus plus tard en cours pour démontrer rigoureusement qu'elle est strictement croissante sans être surjective).