

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

- (a) Vrai. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{L}$. Alors, $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq \varepsilon$ et donc f est continue en x_0 . Puisque x_0 est arbitraire, f est continue en tout point de son domaine.
- (b) Vrai. Comme $f \circ g$ est surjective, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: (f \circ g)(x) = y$. Il existe donc $z = g(x) \in G: f(z) = y$ et donc f est surjective.
- (c) Faux. Prendre par exemple $a_n = \frac{1}{n+2}$ et $b_n = \frac{1}{n+1}$. Alors $a_n < b_n \quad \forall n \geq 0$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
- (d) Faux. Prendre par exemple $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1, \\ 1 & y > 1, \end{cases} \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Ainsi $0 \leq g(x) < 1$ et donc $(f \circ g)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ qui est continue alors que f ne l'est pas.²

Solution 2.

- (a) On pose $z = a + bi$. On trouve $a^2 - b^2 + 2abi = -8 + 6i$, donc $a^2 - b^2 = -8, 2ab = 6$, d'où $a = 1, b = 3$. Donc $z = \pm(1 + 3i)$.
- (b) On pose $z = a + bi$. On trouve $a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3) = 2 - 11i$, donc $a^3 - 3ab^2 = 2, 3a^2b - b^3 = -11$. On trouve $a = 2$ et $b = -1$ comme solution, donc $z = 2 - i$. Les deux autres solutions s'obtiennent en multipliant par $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi $z \in \{2 - i, e^{i\frac{2\pi}{3}}(2 - i), (2 - i)e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$.
- (c) Si $z = a + ib$, on a $e^a e^{ib} = i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$. Donc $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $z \in \{e^{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- (d) Soit $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Puisque $p(z)$ est un polynôme à coefficients réels et de degré impair, il existe au moins une racine réelle (voir Série 9, Exercice 6, d)). La racine $z_0 = -1$ est une racine évidente et permet de factoriser $p(z) = (z + 1)(z^2 + 1)$. Les racines de $z^2 + 1$ sont $\pm i$, donc les racines de $p(z)$ sont 1 et $\pm i$.

Solution 3.

- (a) Initialisation: Pour $n = 0$, $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot n$ est vrai.
Réurrence: On admet $P(n)$ vrai et on démontre $P(n + 1)$.

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

2. On peut aussi construire des contre-exemples où f et g sont toutes les deux discontinues mais $f \circ g$ est continue.

- (b) Initialisation: Pour $n = 1$, $1^5 - 1 = 0 = 0 \cdot 5$ est donc vrai.
Réurrence: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: Après un long développement de $(1+n)^5$, on trouve

$$(1+n)^5 - (1+n) = \underbrace{n^5 - n}_{5k} + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = 5k'$$

où $k, k' \in \mathbb{N}$. Ainsi $(1+n)^5 - (1+n)$ est divisible par 5 et $P(n+1)$ est démontrée.

- (c) Initialisation: Pour $n = 0$, $0^2 = 0^3 = 0$ et donc $P(0)$ est vérifiée.

Réurrence: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: On rappelle que $\sum_{k=0}^n k$ est une somme arithmétique, donc

donc $\sum_{k=0}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$. Ainsi,

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^n k + n+1\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 + 2(n+1) \sum_{k=0}^n k + (n+1)^2.$$

En insérant l'expression de $\sum_{k=0}^n k$ dans l'expression ci-dessus et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 = \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^2(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} k^3$$

et $P(n+1)$ est vérifiée.

Solution 4.

- (a) En utilisant le fait que $\frac{2}{e} < 1$, on obtient immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n e^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0.$$

- (b) On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^{-n})}{e^{-n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

où l'on a utilisé la caractérisation d'une limite de fonction par les suites et le changement de variable $y = e^{-x}$.

- (c) On remarque déjà que

$$1 - \frac{2}{n} = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n-2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2}} \\ &= e^{-2}.\end{aligned}$$

Solution 5.

On remarque que $a_{2n} = (-1)^n$ et $a_{2n+1} = (-1)^n$. Donc $\{a_m \mid m \geq n\} = \{-1, 1\}$ pour tout n , et donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{-1, 1\} = 1$, et similairement $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

Solution 6.

- (a) C'est une récurrence linéaire de la forme $a_{n+1} = qa_n + b$, avec $q = \frac{2}{3}$ et $b = 7$. Comme $|q| < 1$, par le théorème du cours sur les récurrences linéaires, la suite converge vers $\ell = \frac{b}{1-q} = 21$.

Alternativement, a_n s'exprime explicitement par $a_n = q^n a_0 + b \sum_{k=0}^{n-1} q^k$. Très clairement, a_n converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, la limite vaut $\ell = \frac{b}{1-q}$. Dans notre cas, $q = \frac{2}{3} < 1$ et $b = 7$. On trouve donc immédiatement $\ell = 21$.

- (b) La suite est définie par une récurrence non-linéaire $a_{n+1} = f(a_n)$. L'existence d'un point fixe de f est une condition nécessaire à l'existence d'une limite. On résout donc l'équation $\ell = f(\ell) = \frac{2\ell}{3\ell+7}$ et on trouve les solutions $\ell = 0$ et $\ell = -\frac{5}{3}$. La limite, si elle existe, se trouve parmi ces valeurs. Cependant, puisque $a_0 = 1$, $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, et la seule limite candidate est 0. En effet,

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{2a_n}{3a_n + 7} \right| \leq \frac{2}{7} |a_n| \leq \dots \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} |a_0|.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Solution 7.

- (a) On peut raisonner par comparaison en remarquant que $\log(x) \leq \sqrt{x} \quad \forall x > 0$. En effet, une rapide étude de la fonction $f(x) = \log(x) - \sqrt{x}$ montre que $x = 4$ est l'unique point stationnaire ($f'(4) = 0$) et $f''(4) < 0$. Donc $x = 4$ est le maximum absolu. De plus, $f(4) = 2(\log(2) - 1) < 0$ et donc

$$f(x) \leq f_{\max} < 0 \Rightarrow \log(x) \leq \sqrt{x} \quad \forall x > 0$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

et la série converge puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.

(b) Puisque $\frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1} \geq \frac{n^{\frac{5}{2}}}{2n^3} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge donc la série diverge par comparaison.

(c) La série converge par le critère des séries alternées (Leibnitz). En effet, si on note $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

- $a_n a_{n+1} < 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- $|a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = |a_n|$.

(d) Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+1}{5n^3+3} = \frac{2}{5} \neq 0$, la série diverge nécessairement.

Solution 8.

Partir de fonctions du type $f(x) = \frac{1}{x}$ ou $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ semble être une bonne idée car celles-ci divergent quand $x \rightarrow 0$. Cependant, leur intégrale généralisée diverge car $\log(x)$ diverge en 0 et $+\infty$ et $\sqrt{x}$ diverge en $+\infty$. Pour corriger ces problèmes, nous considérons une fonction définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in (0, a], \\ \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-(x-a)} & x \in (a, +\infty), \end{cases}$$

où $a > 0$. On vérifie que f est bien continue en a car $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$. De plus, $f(x) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ par construction. Le calcul de l'intégrale généralisée donne

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{0^+}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-(x-a)} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{x}) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} (1 - e^{-(x-a)}) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Pour une fonction $f \in C^\infty(0, +\infty)$, on peut prendre $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ que l'on a déjà étudié dans la Série 13, Exercice 4 e).

Solution 9.

On a

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (1 + x^2 \sin(\frac{1}{x}))^3 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Le calcul de la dérivée en utilisant la définition donne

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2 \sin(\frac{1}{x}))^3 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 3x^4 \sin(\frac{1}{x})^2 + x^6 \sin(\frac{1}{x})^3}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 + x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)^3 = 0. \end{aligned}$$

Solution 10.

Avant toute chose, nous factorisons le numérateur et le dénominateur pour obtenir $2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$ et $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ et constater que

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{2x - 1}{x + 1}.$$

On commence par vérifier la continuité car elle est une condition nécessaire à la dérivabilité.

Continuité en -1: Le calcul des limites donne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x - 1}{x + 1} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \beta x - 4 = -\beta - 4. \end{aligned}$$

f ne peut donc pas être continue en -1 et donc pas dérivable non plus.

Continuité en 2: Cette fois ci, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \beta x - 4 = 2\beta - 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 1}{x + 1} = 1 \end{aligned}$$

Pour que f soit continue en 2, il faut que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \alpha$. Ainsi nous obtenons $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{5}{2}$.

Dérivabilité en 2: Nous utilisons la définition de la dérivée pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\beta x - 4 - \alpha}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\beta x - 2\beta + \overbrace{2\beta - 4 - \alpha}^0}{x - 2} = \beta = \frac{5}{2}. \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{2x-1}{x+1} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes ($\beta = \frac{5}{2} \neq \frac{1}{3}$), donc f n'est pas dérivable en 2.

Solution 11.

(a) En utilisant le développement limité de $\frac{1}{1+x}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x+x^2} &= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + \varepsilon_1(x)x^4 \\ &= 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + \varepsilon_2(x)x^4 \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + \varepsilon_2(x)x^4\end{aligned}$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

(b) On a

$$\begin{aligned}e^{e^x-1} &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{x^3}{6} + \varepsilon_3(x)x^3 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}(x^2 + x^3) + \frac{x^3}{6} + \varepsilon_4(x)x^3 \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \varepsilon_4(x)x^3\end{aligned}$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0.$$

(c) En utilisant le développement limité de $\sin(x)$, on trouve

$$\frac{\sin(x)}{x} - 1 = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4 \varepsilon(x).$$

Donc, en utilisant le développement limité de $\log(1+x)$, on trouve

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &= \log\left(1 + \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)\right) \\ &= \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)^2 + \varepsilon_5(x)x^4 \\ &= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{3!}\right)^2 + \varepsilon_6(x)x^4 \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \varepsilon_4(x)x^4\end{aligned}$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_5(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_6(x) = 0.$$

Solution 12.

(a) Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(t)}{(1+t)^2} dt &= -\frac{\log(t)}{(1+t)} + \int \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= -\frac{\log(t)}{(1+t)} + \int \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} dt \\ &= -\frac{\log(t)}{(1+t)} + \log(|t|) - \log(|1+t|) + C.\end{aligned}$$

(b) Par une décomposition en éléments simples, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^4 + t^2} dt &= \int \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= -\frac{1}{t} - \arctan(t) + C.\end{aligned}$$

(c) On effectue le changement de variable $t = a \sinh(x)$, donc $dt = a \cosh(x) dx$ et on utilise l'identité $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ pour obtenir

$$\int \sqrt{t^2 + a^2} dt = \int a^2 \cosh(x)^2 dx.$$

On intègre ensuite par partie

$$\begin{aligned}\int a^2 \cosh(x)^2 dx &= a^2 \sinh(x) \cosh(x) - \int a^2 \sinh(x)^2 dx \\ &= a^2 \sinh(x) \cosh(x) + \int a^2 (1 - \cosh(x)^2) dx\end{aligned}$$

d'où l'on obtient $\int a^2 \cosh(x)^2 dx = \frac{a^2}{2} (\sinh(x) \cosh(x) + t)$. On effectue maintenant le changement de variable inverse $x = \operatorname{arcsinh}(\frac{t}{a})$ pour aboutir à

$$\begin{aligned}\int \sqrt{t^2 + a^2} dt &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{t}{a} \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{t}{a} \right) \right) + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{t}{a} \right) \right) \\ &= \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{t}{a} \right).\end{aligned}$$

(d) Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^3} dt &= -\frac{\arctan(t)}{2t^2} \Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+t^2)} dt \\ &= -\frac{\arctan(t)}{2t^2} \Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\arctan(t)}{t^2} + \frac{1}{t} + \arctan(t) \right) \Big|_1^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$