

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

(a) En utilisant que $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, on observe que

$$\sin(x)^5 = (1 - \cos(x)^2)^2 \sin(x) = -f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

avec $t = \varphi(x) = \cos(x)$ et $f(t) = (1 - t^2)^2$. Comme les bornes de x sont $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$, les bornes de t sont $a = \varphi(\alpha) = 1$ et $b = \varphi(\beta) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(x)^2)^2 \sin(x) dx &= - \int_1^0 (1 - t^2)^2 dt \\ &= \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

(b) On pose $x = \varphi(u) = u^2 - 1$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme x varie entre $a = 2 = \varphi(\sqrt{3})$ et $b = 3 = \varphi(2)$, les bornes de u sont $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = 2$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u^2}{u^2-1} du \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)} du \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u-1} du - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u+1} du \\ &= \left[2u + \log \left(\left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + \log \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)} \right). \end{aligned}$$

(c) Le changement de variable à poser est $x = \varphi(u) = u^2$, $\varphi'(u) = 2u$. Comme x varie entre $a = \frac{\pi^2}{16} = \varphi(\frac{\pi}{4})$ et $b = \frac{\pi^2}{9} = \varphi(\frac{\pi}{3})$, les bornes de u sont $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et

$$\beta = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} u \cos(u) du \\ &\stackrel{(*)}{=} 2 \left[u \sin(u) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(u) du \\ &= 2 \left[u \sin(u) + \cos(u) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

où on a intégré (*) par parties avec $f'(u) = \cos(u)$, $g(u) = u$.

(d) En intégrant par parties, on trouve

$$\int_1^3 1 \cdot \log x dx = [x \log x]_1^3 - \int_1^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = [x \log x - x]_1^3 = 3 \log 3 - 2.$$

(e) En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \log x dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 2 \log 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \log 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(f) En posant $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2$ on a $\frac{dx}{du} = 2u$, donc $dx = 2u du$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 e^u 2u du = [2ue^u]_1^2 - \int_1^2 2e^u du \\ &= [2ue^u - 2e^u]_1^2 = 4e^2 - 2e^2 - 2e + 2e = 2e^2. \end{aligned}$$

(g) En intégrant par parties, on obtient

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} \log x dx = \left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2.$$

(h) En intégrant par parties, on obtient

$$\int x \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3} x(x-1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} x(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x-1)^{\frac{5}{2}} + C.$$

(i) En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int x \arctan(2x) \, dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(2x) - \int \frac{x^2}{1+4x^2} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(2x) - \frac{1}{4} \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{1+4x^2} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(2x) - \frac{1}{4} \int 1 - \frac{1}{1+4x^2} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2}{1+4x^2} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \arctan(2x) + C.
 \end{aligned}$$

(j) Sans surprise, une intégration par parties donne

$$\int 1 \cdot \log^3 x \, dx = x \log^3 x - \int 3 \log^2 x \, dx$$

Une nouvelle intégration par parties nous attend au tournant, pour donner

$$\int 1 \cdot \log^2 x \, dx = x \log^2 x - \int 2 \log x \, dx = x \log^2 x - 2(x \log x - x) + C.$$

Finalement, au bout du chemin, on trouve

$$\begin{aligned}
 \int \log^3 x \, dx &= x \log^3 x - 3 [x \log^2 x - 2(x \log x - x)] \\
 &= x \log^3 x - 3x \log^2 x + 6x \log x - 6x + C.
 \end{aligned}$$

(k) Il s'agit ici de s'orienter vers une méthode d'intégration peu connue mais pourtant diablement efficace: l'intégration *par parties*. On trouve alors

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3 x \cos x \, dx &= \int \tan^2 x \sin x \, dx \\
 &= -\tan^2 x \cos x - \int -\cos x \cdot 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \, dx \\
 &= -\tan^2 x \cos x + 2 \int \cos x \tan x \, dx + 2 \int \cos x \tan^3 x \, dx \\
 &= -\tan^2 x \cos x - 2 \cos x + 2 \int \cos x \tan^3 x \, dx
 \end{aligned}$$

En passant $2 \int \cos x \tan^3 x \, dx$ de l'autre côté, on obtient

$$-\int \cos x \tan^3 x \, dx = -\tan^2 x \cos x - 2 \cos x$$

donc

$$\int \cos x \tan^3 x \, dx = \tan^2 x \cos x + 2 \cos x + C.$$

- (l) On utilise le changement de variables $u = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(u)$. On a donc $dx = \frac{1}{1+u^2} du$ et $\cos^6(x) = \cos^6(\arctan(u)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^6 = \frac{1}{(1+u^2)^3}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^6(x)} dx &= \int \frac{(1+u^2)^3}{1+u^2} du = \int (1+2u^2+u^4) du \\ &= u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \tan(x) + \frac{2}{3}\tan^3(x) + \frac{1}{5}\tan^5(x) + C\end{aligned}$$

- (m) Comme au point précédent, on utilise le changement de variables $u = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(u)$. On a donc $dx = \frac{1}{1+u^2} du$ et $\sin^3(x) \cos(x) = \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{u^3}{(1+u^2)^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^3(x) \cos(x)} dx &= \int \frac{1+u^2}{u^3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + \log|u| + C \\ &= -\frac{1}{2\tan^2(x)} + \log|\tan(x)| + C.\end{aligned}$$

- (n) Ici, on utilise le changement de variables $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\arctan(u)$. On a donc $dx = \frac{2}{1+u^2} du$ et $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. Ainsi

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)} dx = \int \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int du = u + C = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

- (o) Poser $t = u^2 \Rightarrow dt = 2u du$ (avec $t, u > 0$)

$$\begin{aligned}\int^{t=x} \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)} dt &= \int^{u=\sqrt{x}} \frac{u}{u^2(1+u^2)} 2u du \\ &= \int^{\sqrt{x}} \frac{2}{1+u^2} du \\ &= 2\arctan \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

pour $x > 0$.

- (p) Poser $1+t = u^2 \Rightarrow dt = 2u du$ (avec $t > -1$ et $u > 0$)

$$\begin{aligned}\int^{t=x} \frac{1}{1+\sqrt{1+t}} dt &= \int^{u=\sqrt{1+x}} \frac{1}{1+u} 2u du \\ &= \int^{\sqrt{1+x}} \frac{2(1+u)-2}{1+u} du \\ &= 2\sqrt{1+x} - 2\log(1+\sqrt{1+x}) + C.\end{aligned}$$

- (q) On a

$$\begin{aligned}\int^x \frac{3y^2-4}{y^3-4y+7} dy &= \int^x \frac{1}{y^3-4y+7} (y^3-4y+7)' dy \\ &= \log|x^3-4x+7| + C.\end{aligned}$$

Solution 2.

Pour intégrer des fractions polynomiales la méthode des éléments simples est particulièrement adaptée.

(a) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x-2}{x(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}, \quad \text{avec} \quad \alpha = -2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x(x+1)^2} dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= -2 \log |x| + 2 \log |x+1| - \frac{3}{x+1} + C. \end{aligned}$$

(b) Méthode 1: La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{\alpha x + \beta}{1+x^2} + \frac{\gamma x + \delta}{(1+x^2)^2}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx &= \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{-x}{(1+x^2)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

Méthode 2: Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx &= \int -\frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' dx \\ &= -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{x^2}{2(1+x^2)} + C', \end{aligned}$$

et l'on note que les solutions obtenues par les méthodes 1 et 2 diffèrent d'une constante.

(c) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^2-2}{x^3-x^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2}{x^3-x^2} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= 2 \log(|x|) - \log(|x-1|) - \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

(d) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{4x}{x^4 - 1} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x + 1} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2 + 1}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\int \frac{4x}{x^4 - 1} dx = \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \log \left(\frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1} \right) + C.$$

Solution 3.

Si $r \neq 1$, on a

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^r} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-r+1}}{-r+1} \right]_1^u = \frac{1}{r-1} \left(1 + \lim_{u \rightarrow \infty} u^{1-r} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r < 1 \\ \frac{1}{r-1} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Et si $r = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\log(x) \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \log(u) = +\infty.$$

Solution 4.

(a) La fonction $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ n'est pas définie (entre autres) en $x = \frac{\pi}{2}$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \lim_{d \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \int_{\frac{\pi}{4}}^d \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \lim_{d \rightarrow \frac{\pi}{2}-} [-\log |\cos x|]_{\frac{\pi}{4}}^d \\ &= \lim_{d \rightarrow \frac{\pi}{2}-} [-\log(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^d \\ &= \lim_{d \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \left(-\log(\cos d) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = +\infty \end{aligned}$$

car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0+} \log(y) = -\infty$. Donc $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{\cos x} dx$ diverge.

(b) Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}} dx &= \lim_{d \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \int_{\frac{\pi}{4}}^d \frac{\sin x}{(\cos x)^{1/3}} dx \\ &= \lim_{d \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \left[-\frac{3}{2} (\cos x)^{2/3} \right]_{\frac{\pi}{4}}^d \\ &= \lim_{d \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \left(-\frac{3}{2} (\cos d)^{2/3} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} \right) = \frac{3}{2} (1/\sqrt{2})^{2/3} \end{aligned}$$

car $(\cos \frac{\pi}{2})^{2/3} = 0$.

(c) On rappelle que la fonction $\log(x)$ n'est pas définie en $x = 0$. On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \log(x) dx &= \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 (x)' \log(x) dx \\
 &\stackrel{p.p.}{=} \lim_{c \rightarrow 0+} \left(x \log(x) \Big|_c^1 - \int_c^1 x (\log x)' dx \right) \\
 &= \lim_{c \rightarrow 0+} \left(-c \log(c) - (1 - c) \right) \\
 &= \lim_{c \rightarrow 0+} \frac{\log(c)}{-c^{-1}} - 1 \\
 &\stackrel{B.H.}{=} \lim_{c \rightarrow 0+} \frac{1/c}{c^{-2}} - 1 = -1.
 \end{aligned}$$

(d) La fonction $\frac{1}{(5-x)}$ n'est pas définie en $x = 5$. Voici l'argument dans ce cas

$$\begin{aligned}
 \lim_{d \rightarrow 5-} \int_1^d \frac{1}{5-x} dx &= \lim_{d \rightarrow 5-} [-\log |5-x|]_1^d \\
 &= \lim_{d \rightarrow 5-} [-\log(5-x)]_1^d \\
 &= \lim_{d \rightarrow 5-} (-\log(5-d) + \log(4)) = +\infty.
 \end{aligned}$$

(e) La fonction $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie en $x = 0$ et l'intervalle $]0, +\infty[$ n'est pas majoré. Par le changement de variable $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, on obtient

$$\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_{x=1}^{x=t} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_{u=1}^{u=\sqrt{t}} e^{-u} du = -2e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1}.$$

Alors, puisque la fonction $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{0+}^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
 &= - \lim_{c \rightarrow 0+} \int_1^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
 &= - \lim_{c \rightarrow 0+} (-2e^{-\sqrt{c}} + 2e^{-1}) = 2 - \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_1^d \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{d \rightarrow +\infty} (-2e^{-\sqrt{d}} + 2e^{-1}) = \frac{2}{e}.$$

On en déduit que $\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ converge et vaut 2.

(f) On sépare l'intégrale en deux:

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\cos(x) \leq 1$, on a, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. D'où

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \leq \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty$$

et la première intégrale converge. Pour la deuxième, pour $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}}_{a_k} + \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

où n est choisi tel que $c \in [\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$ (ou en d'autres termes, $n = \lfloor \frac{c-\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor$). Pour l'intégrale à droite, on remarque que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \right| &\leq \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^c \left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right| dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi} dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, donc lorsque $c \rightarrow \infty$.

Pour la somme, on remarque que, dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, $\cos(x)$ est positif si k est pair, et négatif si k est impair. Ainsi a_k est positif si k est pair, et négatif si k est impair. De plus, sur cet intervalle là, on a

$$\left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}} \rightarrow 0$$

lorsque $k \rightarrow \infty$. Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, et la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est donc une série alternée qui converge par le critère de Leibnitz.

Ainsi, lorsque $c \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \sum_{k=1}^n a_k + \int_{\frac{\pi}{2}+n\pi}^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k + 0 < +\infty$$

et l'intégrale converge. On a donc bien montré que l'intégrale $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge. (Elle vaut en fait $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, cf Analyse 3 !)

Solution 5.

- (a) Vrai. Par le théorème de la moyenne, $\exists u \in]a, b[$ tel que $0 = \int_a^b f(x) dx = f(u)(b-a)$. Comme $b > a$, on doit avoir $f(u) = 0$.

- (b) Faux. Prendre par exemple $f(x) = x$ sur $[-1, 2]$. Alors $\int_{-1}^2 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} \geq 0$ mais $f(-1) = -1 < 0$.
- (c) Vrai. Par le théorème de la moyenne, il existe $u \in]a, b[$ tel que $\int_a^b f(x) dx = f(u)(b-a)$. Comme on a $f(u) < 0$ et que $b > a$, le résultat suit.
- (d) Faux. Prendre par exemple $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-2, -1]$. Ainsi $f(x) \leq 0$ sur $[-2, -1]$ mais $F(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0$ pour tout $x \in [-2, -1]$.
- (e) Faux. Considérer par exemple la fonction constante $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors $F(x) = x + 1$ est une primitive de f mais $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x 1 dt = x - 0 = x \neq x + 1 = F(x)$.

Solution 6.

On pose $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$, pour $n \geq 1$. On a

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} I_n &= \int \underbrace{1}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}}_{\downarrow} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \frac{-2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \end{aligned}$$

En écrivant $x^2 = x^2 + a^2 - a^2$, cette dernière intégrale devient

$$\int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = I_n - a^2 I_{n+1}.$$

On trouve ainsi

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

d'où

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

Pour calculer l'intégrale, on peut appliquer cette formule 4 fois avec $a = 1$ pour trouver une primitive et l'évaluer aux bornes. Ou alors, on montre par récurrence sur n que, pour $a = 1$, on a

$$I_n = f_n(x) + c_n \arctan(x),$$

où f_n est une fonction avec $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, et $c_1 = 1$ et $c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2}$ si $n \geq 2$. C'est vrai pour $n = 1$ avec $f_1(x) = 0$ et pour $n + 1$, on a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \\ &= \underbrace{\frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} f_n(x)}_{f_{n+1}(x)} + \left(c_n \cdot \frac{2n-1}{2n} \right) \arctan(x) \\ &= f_{n+1}(x) + c_{n+1} \arctan(x) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'hypothèse de récurrence à la deuxième égalité. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^4} dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} [I_4(x)]_0^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[f_4(x) + \arctan(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \right]_0^N \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} f_4(N) - f_4(0) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{5}{16} \arctan(N) - \frac{5}{16} \arctan(0) \\ &= 0 - 0 + \frac{5}{16} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{15\pi}{32}. \end{aligned}$$

Solution 7.

(a) Le plus simple est peut-être de voir que $x^s e^{-x} = \frac{1}{x^2} \underbrace{\frac{x^{s+2}}{e^x}}_{\rightarrow 0}$ lorsque $x \rightarrow \infty$. La fonction $\frac{x^{s+2}}{e^x}$ est donc bornée sur $[0, +\infty[$, disons $\leq M$ et on a donc

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^s e^{-x} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \cdot M dx \text{ qui converge.}$$

Ainsi l'intégrale (et donc $f(s)$) est bien définie pour tout $s \geq 0$.

(b) On a

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^u = 1 - \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-u} = 1.$$

(c) En intégrant par parties, on a

$$f(s) = \int_0^\infty \underbrace{x^s}_{\downarrow} \underbrace{e^{-x}}_{\uparrow} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-x^s e^{-x} \right]_0^u + \int_0^\infty s x^{s-1} e^{-x} dx = 0 + s f(s-1).$$

(d) Récurrence facile !