Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

(a) Vérification élémentaire.

(b) Vérification élémentaire.

(c) Comme sa dérivée $\sinh'(x) = \cosh(x)$ est > 0, la fonction est strictement croissante, donc injective. On calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty$, donc son image est $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective. Pour la réciproque, on pose $y = \sinh(x)$ et on isole x (en posant $t = e^x$)

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = t - \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2}.$$

Comme $t = e^x > 0$, il faut choisir le $+$ et on trouve

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \operatorname{arcsinh}(y).$$

(d) Comme sa dérivée $\cosh'(x) = \sinh(x)$ s'annule uniquement en 0, c'est le seul point stationnaire de $\cosh(x)$ et on vérifie que c'est un minimum (car $\cosh''(0) = \cosh(0) = 1 > 0$). On vérifie également que $\sinh(x)$ est strictement positive pour $x > 0$, donc cosh est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Finalement, comme $\cos(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty$, l'image est $[1, +\infty[$, et la fonction est bijective (lorsque (co)restreinte à $\cosh\colon [0, +\infty[\to [1, +\infty[$). Le calcul de arccosh est similaire au (c).

Solution 2.

Pour la continuité, on vérifie que $\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\downarrow 1} f(x) = \alpha + \beta$, d'où $\alpha + \beta = 3$. Pour la dérivabilité, on a: pour $x \leq 1$, $f'(x) = 2x - 1$, d'où $\lim\limits_{x\uparrow 1} f'(x) = 1$ et pour $x > 1$, $f'(x) = \alpha$ d'où $\lim\limits_{x\downarrow 1} f'(x) = \alpha$. Pour que la fonction soit dérivable, il faut donc prendre $\alpha = 1$ et donc $\beta = 2$.

Solution 3.

(a) Par la caractérisation des suites, il suffit de montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = \exp(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t &= \lim_{t\to+\infty} \exp\left(\log\left(\left(1 + \frac{x}{t}\right)^t\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{t\to+\infty} t \log\left(1 + \frac{x}{t}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+xy)}{y}\right) \overset{\text{BH}}{=} \exp\left(\lim_{y\to 0} \frac{\frac{x}{1+y}}{1}\right) = \exp(x),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé, par ordre d'apparition à l'écran, le fait que $a = \exp(\log(a))$, la continuité de exp, la propriété $\log(a^b) = b\log(a)$, le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ et la règle de Bernoulli-L'Hospital.

(b) On le montre par récurrence sur le degré n de $p(x)$. Si $p(x)$ est de degré 0, p est une constante, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{e^x} = \dfrac{c}{+\infty} = 0$. Si $p(x)$ est de degré $n+1$, $p'(x)$ est un polynôme de degré n, et on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{p'(x)}{e^x} = 0$ par récurrence. Ainsi, par Bernoulli-L'Hospital, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p'(x)}{e^x} = 0.$$

Solution 4.

On utilise la règle de Bernoulli-L'Hospital à répétition (la vérification des hypothèses est laissée à l'étudiant.e).

(a) On a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\log(x-1)}{x-2} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1$.

(b) On peut soit appliquer BH plusieurs fois (avec l'expression $\frac{\tanh(x)-1}{\frac{1}{x}}$), soit remarquer que

$$(\tanh(x) - 1)x = \frac{\sinh(x) - \cosh(x)}{\cosh(x)} x = -\frac{e^{-x}}{\cosh(x)} x = -\frac{x}{e^x \cosh(x)}.$$

Donc $|(\tanh(x)-1)x| \leq \frac{x}{e^x} \to 0$ lorsque $x \to \infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} (\tanh(x)-1)x = 0$.

(c) On commence par calculer la limite du log: $\lim\limits_{x\to 0} \log\left((1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\sin(x))}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+\sin(x)}\cos(x)}{1} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} ((1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

(d) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - \sin(x)}{x - \sin(x)} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos(x)^2} - \cos(x)}{1 - \cos(x)} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} + \sin(x)}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\cos(x)^3} + 1 = 3$.

(e) On a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\log(x) - (x-1)}{(x-1)\log(x)} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x) - 1 + 1}{\log(x) + 1 - \frac{1}{x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$.

(f) On calcule d'abord la limite du log: $\lim\limits_{x\downarrow 0} \log(x^{\pi x}) = \lim\limits_{x\downarrow 0} \pi \dfrac{\log(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0} \pi \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\downarrow 0} -\pi x = 0$. Donc $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^{\pi x} = e^0 = 1$.

(g) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\tan(x)} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\cos(x)^2 = 0$.

(h) On a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan(x) - \dfrac{\pi}{2\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2x\sin(x)-\pi}{2\cos(x)} \overset{\mathrm{BH}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin(x)+2x\cos(x)}{-2\sin(x)}$ $= -1$.

Solution 5.
Toutes les phrases sans $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ sont **vraies** (et sans intérêt). Par exemple: $\cos(x) = 1 + 2x^2 + x^4\varepsilon(x)$, il suffit de prendre

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-(1+2x^2)}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour les autres, on a les cas suivants:

$\cos(x) =$	reste	V/F	Raison
1	$x\varepsilon(x)$	Vrai	DL vu en cours
1	$x^{2,3,4}\varepsilon(x)$	Faux	Il manque les autres termes du DL
$1+x$	$x^{1,2,3,4}\varepsilon(x)$	Faux	Pas le bon DL
$1+2x^2$	$x\varepsilon(x)$	**Vrai**	$\varepsilon(x) = 2x + \varepsilon_1(x)$ où ε_1
			est le reste du DL $\cos(x) = x + x\varepsilon_1(x)$.
$1+2x^2$	$x^{2,3,4}\varepsilon(x)$	Faux	Pas le bon DL
$1-\frac{1}{2}x^2$	$x\varepsilon(x)$	**Vrai**	Le reste du DL d'ordre 2 est de la forme
			$x^2\varepsilon(x) = x\underbrace{(x\varepsilon(x))}_{\to 0}$
$1-\frac{1}{2}x^2$	$x^{2,3}\varepsilon(x)$	Vrai	DL vu en cours
$1-\frac{1}{2}x^2$	$x^4\varepsilon(x)$	Faux	Il manque le terme $\frac{1}{24}x^4$

Solution 6.

(a) $\sin(3x) = 3x - \dfrac{9x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

(b) $\log(2+x) = \log(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x)$.

(c) $\log(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)$.

(d) $\log(1+x-2x^2) = x - \dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{7x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$.

(e) $e^{\sin(x)} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)$.

(f) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$.

(g) $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$.

(h) On décompose: $\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{1+2x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x) + 2 - 4x + 8x^2 - 16x^3 + 32x^4 + x^4\varepsilon_2(x) = 3 - 3x + 9x^2 - 15x^3 + 33x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

(i) $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + x^{2n}\varepsilon(x)$.

(j) On a $f(x) = \frac{x}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{x}{9}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{9^k} + x^{2n}\varepsilon(x)\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{9^{k+1}} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

Solution 7.

(a) Points stationnaires: $0, -\frac{10}{3}$. Min local en 0, max local en $-\frac{10}{3}$. Point d'inflexion: $-\frac{5}{3}$. La fonction croît sur $[6, -\frac{10}{3}]$, décroît sur $[-\frac{10}{3}, 0]$ et croît sur $[0, 1]$. Elle est concave sur $[-6, -\frac{5}{3}]$ et convexe sur $[-\frac{5}{3}, 1]$. Le maximum global est le maximum local en $-\frac{10}{3}$ et le minimum global est atteint au bord, en -6.

(b) Même chose qu'au (a), mais l'intervalle n'a pas d'extrémités, donc pas de minimum global (celui en -6 n'est jamais atteint).

(c) On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{5}{4} & -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \\ x^2 - x + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et } f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & -1 \leq x < -\frac{1}{4} \\ 2x - 1 & -\frac{1}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

Comme $|x + \frac{1}{4}|$ n'est pas dérivable en $-\frac{1}{4}$, la fonction n'est pas dérivable en ce point. De plus, $f''(x) = 2$ si $x \neq -\frac{1}{4}$. Les points stationnaires sont en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Il s'agit de minimums locaux (car $f'' > 0$). Il n'y a pas de points d'inflexions. La fonction décroît sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, croît sur $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$, décroît sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ et croît sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Le point en $-\frac{1}{4}$ où f' n'est pas défini est donc un maximum local. f est convexe sur $[-1, -\frac{1}{4}]$ et sur $[-\frac{1}{4}, 1]$ (mais pas sur $[-1, 1]$!) Finalement le maximum global est atteint au bord, en $x = -1$, et le minimum global est le minimum local en $\frac{1}{2}$.

(d) Ici, $2-x < 0$ pour tout $x \in]2, 3[$, donc $f(x) = (x-1)^2 + 2(2-x) + 1 = x^2 - 4x + 6$. Ainsi $f'(x) = 2x - 4$ et $f''(x) = 2$. Il n'y a pas de points stationnaires ($f' > 0$ sur $]2, 3[$) donc pas d'extrema locaux, et pas de points d'inflexions (car $f'' > 0$). f est croissante et convexe sur $]2, 3[$. Pas de maximum / minimum globaux, car $]2, 3[$ n'a pas d'extrémités.

(e) La dérivée de $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$ est

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 + 1) - x^3(6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{9x^4 + 3x^2 - 6x^4}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2(x^2 + 1)}{(3x^2 + 1)^2}$$

$x = 0$ est le seul point stationnaire. On a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle n'admet pas d'extremums. De plus

$$f''(x) = \frac{-6x(x^2 - 1)}{(3x^2 + 1)^3}.$$

et f' a donc 3 points stationnaires en $-1, 0, 1$. On remarque que $f''(x)$ est > 0 avant -1, < 0 entre -1 et 0, > 0 entre 0 et 1, et finalement < 0 après 1. Les trois points sont donc des points d'inflexion, et f est convexe sur $]-\infty,-1]$ et sur $[0,1]$, et concave sur $[-1,0]$ et $[1,+\infty[$.

(f) On a $f'(x) = \log(x)+1$ et $f''(x) = \frac{1}{x}$. Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, et c'est le seul point stationnaire. Comme $f''(e^{-1}) > 0$, c'est un minimum local. $f'(x) < 0$ si $x \in]0, e^{-1}[$, donc f décroît sur $]0, e^{-1}[$. $f'(x) > 0$ si $x \in]e^{-1}, +\infty[$, donc f croît sur $]0, e^{-1}[$. $f''(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$, donc f est convexe sur $]0,+\infty[$. Comme f décroît avant e^{-1} et croît après, f admet un minimum global en e^{-1}.

Solution 8.

(a) Faux. Prendre par exemple $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours). Les dérivées latérales en 0 existent mais ne sont pas égales.

(b) Faux. Il suffit de prendre l'exemple du cours (donné par $f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$) restreint à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(c) Faux. En prenant $f(x) = x$, on a $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 (cf. cours).

(d) Faux. Prendre par exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ pour un } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable en 0, car

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ pour un } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où $0 \leq \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq |x| \to 0$ et donc $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ par le théorème des deux gendarmes. On voit que cette fonction a une discontinuité en $\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc arbitrairement proche de 0. Ainsi, f n'est jamais continue sur $]-\delta, \delta[$, quelque soit $\delta > 0$.

(e) Vrai. On a $f'(1) = 2-2 = 0$ et donc $(f \circ f)'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = 0$.

(f) Vrai. Si la droite tangente au point $(-1,2)$ est $y = 6x+8$, on a $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = 6$, la pente de la droite tangente. Ainsi $f^{-1}(2) = -1$ et $(f^{-1})'(2) = 1/f'(-1) = 1/6$.

(g) Faux. On sait que $f^{-1}(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$. Donc $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))}$ $= \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{1+e^0} = \dfrac{1}{2} \neq 1 + \dfrac{1}{e}$, où l'on a utilisé la proposition sur la dérivation de fonctions réciproques.

(h) Faux. Prendre par exemple $f(x) = -|x+3|$. f est dérivable partout sauf en -3, mais $f \circ f(x) = -|-|x+3|+3|$, ce qui vaut $-|x|$ dès que $x \geq -3$. $f \circ f$ n'est donc pas dérivable en 0.

(i) Vrai. En appliquant plusieurs fois la règle de dérivation de composées, on voit que $f'(a) = 0$ multiplie l'expression, qui vaut donc 0.