

## SÉRIE 7

1. (★) Soit  $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1/f(x)) = 2$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .
2. Prouver que la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$  est prolongeable par continuité en  $x = 0$ , et donner son prolongement  $\hat{f}$ .
3. Déterminer dans chaque cas si la fonction  $f$  est prolongeable par continuité et, si oui, donner le prolongement associé  $\hat{f}$  :
  - (a)  $f(x) = \frac{|x|(x+1) + x}{x^2(x+1)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ;    (b)  $f(x) = \frac{x\sqrt{\cos^2 x - 4\cos x + 3}}{|x|\sin x}, \forall x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ .
4. Prouver que la fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$ ,  $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  est discontinue en tout point.  
*Indication* : Pour chaque  $a \in \mathbb{R}$  considérer deux suites  $(x_n) \subset \mathbb{Q}$  et  $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  qui convergent vers  $a$ .
5. Etudier la continuité de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 + x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
6. Prouver que, si  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe, alors  $f$  est bornée sur  $[a, \infty)$ .
7. Donner un exemple de fonction bornée sur  $[0, 1]$  qui n'atteint ni son infimum ni son supremum.
8. On dit qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a la *propriété de la valeur intermédiaire* si  $f$  prend toutes les valeurs comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Donner un exemple de fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui ait la propriété de la valeur intermédiaire mais qui ne soit pas continue sur  $[0, 1]$ .
9. Montrer que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  l'est aussi. Montrer que la réciproque est fausse.
10. Montrer que chacune des équations suivantes possède une solution dans  $\mathbb{R}$  :
  - (a)  $x^2 - \frac{1}{x} = 1$ ,    (b)  $e^x = x + 2$ ,    (c)  $x + e^x + \ln(x) + \sin(x) = 0$ ,
  - (d)  $P(x) = 0$ , où  $P \in \mathbb{R}[x]$  est un polynôme de degré impair.*Indication* : Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire.
11. Considérons une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ . Prouver qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = c$ .
12. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Prouver que  $f$  est constante.
13. Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. Prouver que :
  - (a)  $f(x) \geq g(x), \forall x \in \mathbb{Q} \implies f(x) \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ;
  - (b)  $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{Q} \implies f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .
14. (★) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction non constante, continue en un point  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et telle que
 
$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Prouver qu'il existe  $a > 0$  tel que  $f(x) = a^x$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

*Indication* : Commencer par montrer que  $f(0) = 1$ ,  $f(-x) = f(x)^{-1}$  et  $f(n) = f(1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .