Série 6

1. Etudier la nature des séries suivantes en appliquant les critères de comparaison :
$$\text{(a)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}, \quad \text{(b)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-7n+13}, \quad \text{(c)} \sum_{n\geq 1} a^{\sum_{k=1}^n 1/k} \ (a>0), \quad \text{(d)} \sum_{n\geq 1} \ln\Big(1+\frac{1}{n^\alpha}\Big) \ (\alpha\in\mathbb{R}).$$

2. Etudier la nature des séries suivantes :
$$\text{(a)} \sum_{n\geq 1} \frac{a^n n!}{n^n} \ (a\in\mathbb{R}), \qquad \text{(b)} \sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!} \ (a\in\mathbb{R}), \qquad \text{(c)} \sum_{n\geq 1} a^{n^p} \ (a\in\mathbb{R},\ p\in\mathbb{N}^*),$$
$$\text{(d)} \sum_{n\geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}, \quad \text{(e)} \sum_{n\geq 1} \frac{P(n)}{n!} \ (P\in\mathbb{R}[x]\setminus\{0\}), \quad \text{(f)} \sum_{n\geq 1} P(n)a^n \ (P\in\mathbb{R}[x]\setminus\{0\},\ a\in\mathbb{R}).$$

3. Etudier la nature des séries suivantes en appliquant d'abord le critère de condensation :
$$\text{(a)} \sum_{n\geq 3} \frac{1}{[\ln(\ln(n))]^{\ln(n)}}, \quad \text{(b)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^{\alpha\ln(n)}} \ (\alpha\in\mathbb{R}), \quad \text{(c)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \ (\alpha,\beta\geq 0).$$

4. Etudier la nature des séries suivantes :
$$\text{(a)} \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!}{4^n(n!)^2}, \quad \text{(b)} \sum_{n\geq 1} \frac{(2n+1)!}{4^n(n!)^2}, \quad \text{(c)} \sum_{n\geq 1} \left[\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right]^p \ (p\in\mathbb{N}^*).$$
Indication : L'identité $x^p-1=(x-1)\sum_{k=0}^{p-1}x^k$ $(p\in\mathbb{N}^*)$ peut s'avérer utile.

5. Examiner la pertinence du critère du quotient/de la racine pour prouver que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}<\infty$, avant et après avoir fait une condensation avec $a_n=2^n$.

6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$ une suite telle que $n\Big(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\Big)\leq 1$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Prouver que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n=\infty$.

7. Déterminer dans chaque cas le plus grand domaine $D(f)\subset\mathbb{R}$ où la fonction f est définie. Puis trouver $\inf_{D(f)} f$, $\sup_{D(f)} f$ et déterminer, s'ils existent, les points de minimum et maximum de f :
$$\text{(a) } f(x)=\frac{1}{x-1}, \qquad \text{(b) } f(x)=\frac{1}{x^2}, \qquad \text{(c) } f(x)=x^2+1,$$
$$\text{(d) } f(x)=x^3-3x^2+2x, \qquad \text{(e) } f(x)=\ln(1+x), \qquad \text{(f) } f(x)=\ln(1+x^2),$$
$$\text{(g) } f(x)=\cos(\pi x), \qquad \text{(h) } f(x)=\frac{1}{\sin(x)}.$$
Indication : N'hésitez pas à utiliser la dérivée des fonctions et les limites connues.