Série 5

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^*$ satisfaisant $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = \infty$.

2. (a) Montrer que la suite de terme général $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$, est de Cauchy.
   (b) Montrer que la suite de terme général $x_n = (-1)^{n-1}$, $n \geq 1$, n'est pas de Cauchy.
   (c) Montrer que la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$, est de Cauchy, et calculer sa limite.

3. ($\star$) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $x_n = \sin(\ln(n))$ satisfait $x_{n+1} - x_n \to 0$ quand $n \to \infty$, mais n'est pas convergente

   *Indications :* Esquisser le graphe de la fonction $f(x) = \sin(\ln(x))$, $x \geq 1$, pour saisir le phénomène. Construire deux sous-suites $(n_k)$ et $(n'_k)$ telles que $x_{n_k} \geq \sqrt{2}/2$ et $x_{n'_k} \leq -\sqrt{2}/2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Calculer dans chaque cas la somme de la série, à l'aide de la suite des sommes partielles :

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+3)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} na^n, \quad \forall a \in (-1,1)$

   *Indication :* Pour (d), calculer tout d'abord $(1-a)s_n$, où $s_n$ est la somme des $n$ premiers termes.

5. (a) Prouver qu'une série de nombres positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est bornée supérieurement.
   (b) En déduire que, pour tout $a \in (0,1)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} n^\alpha a^n$ est convergente.

6. (a) Prouver la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

   *Indication :* Montrer que $(x_n)$ est décroissante. Puis montrer que $x_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ en étudiant la monotonie de $y_n := x_n - \frac{1}{n}$. Ces résultats reposent sur l'encadrement $(1+\frac{1}{n})^n \leq e \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.
   (b) Déduire du point (a) que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ en appliquant successivement le critère de d'Alembert et celui de la racine. Conclusion ? (Voir aussi série 4, exercice 4 (a).)

8. ($\star\star$) On dit qu'une série $\sum a_n$ est *conditionnellement convergente* ssi $\sum a_n$ existe mais $\sum |a_n| = +\infty$. On appelle *réarrangement des termes de la série* toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

   Démontrer le *théorème de Riemann* : Soit $\sum a_n$ une série conditionnellement convergente, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors il existe un réarrangement $\sigma$ des termes de $\sum a_n$ tel que $\sum a_{\sigma(n)} = \ell$.

   *Indications :* (i) Définir $a_n^{\pm} := \frac{1}{2}(|a_n| \pm a_n)$ et montrer, tout d'abord, que $\sum a_n^- = \sum a_n^+ = +\infty$.
   (ii) Il peut être instructif de considérer le cas particulier de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.