

SÉRIE 4B (★)

1. Preuve alternative du théorème de Bolzano–Weierstrass : prouver le théorème en montrant que toute suite réelle possède une sous-suite monotone.
2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est un *point d'accumulation* de (x_n) s'il existe une sous-suite de (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow \infty$. On note $\text{acc}(x_n) \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ l'ensemble des points d'accumulation de (x_n) . On définit alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ de la façon suivante.

Si $\text{acc}(x_n) \subset \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf \text{acc}(x_n), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup \text{acc}(x_n).$$

Ces définitions s'appliquent aux suites bornées. Afin de pouvoir aussi considérer des suites non-bornées, et donc des $\liminf$ et $\limsup$ infinies, nous la complétons comme suit.

Si $-\infty \in \text{acc}(x_n)$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Si $+\infty \in \text{acc}(x_n)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Si $\text{acc}(x_n) = \{-\infty\}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Si $\text{acc}(x_n) = \{+\infty\}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Pour chacune des suites suivantes, déterminer $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$:

$$(i) \ x_n = \frac{(-1)^n}{1 + 1/n}, \quad (ii) \ x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right), \quad (iii) \ x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k.$$

Démontrer les résultats suivants, pour toutes suites $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$:

- (a) Si (x_n) est bornée, alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sont finis et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (b) (x_n) converge ssi $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sont finies et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.
Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (c) Si $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$.

3. Nous avons vu au cours que $\ell := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} < \infty$. Le but de cet exercice est de montrer que $\ell = e$. On pose

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Nous savons aussi du cours que $x_n \leq s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (x_n) est croissante et $x_n \rightarrow e$.

- (a) Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \ell.$$

- (b) Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq s_N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

- (c) Conclure.

4. Posons à nouveau $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

- (a) Montrer que $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$. Estimer l'erreur commise dans l'approximation $e \approx s_{10}$.
- (b) En utilisant les inégalités du point (a), prouver par l'absurde que $e \notin \mathbb{Q}$.