Série 3

1. On fixe $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la limite d'une suite, prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ de terme général $x_n = (1+1/n)^k$ converge vers 1.

2. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont des paramètres :

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^2n+1}+2}{\sqrt{n+3}+4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n+3}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{an^6+n^2+2}-2n^2}{bn^2+1}$$

   (b)
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+an+b}-n, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{a^2n^2+1}-\sqrt{b^2n^2+2}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c}-n$$

   (c)
   $$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)$$

   Indication : Utiliser la périodicité du sinus.

3. A l'aide du théorème des deux gendarmes, étudier la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ définies par :

   (a) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}, \quad x_n = \dfrac{n+2}{n+\cos(\frac{n\pi}{2})}$

   (b) $x_n = \dfrac{(n+1)^n n!}{n^{2n}}$ *Indication :* Utiliser $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

   (c) $x_n = \dfrac{n^2}{n^3+3n+1} + \dfrac{n^2+1}{n^3+3n+2} + \dfrac{n^2+2}{n^3+3n+3} + \cdots + \dfrac{n^2+2n-1}{n^3+5n}$

4. (a) Montrer à l'aide de la définition que
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{P(n)} = \infty$ pour tout polynôme $P(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ de degré $k \geq 1$ avec coefficient dominant positif.

   (b) Montrer à l'aide de la définition que, pour $a > 1$ et $p \in \mathbb{N}$,
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$
   En déduire que, pour $a > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{a^n} = 0$ pour tout polynôme $P(x)$. On dit que "l'exponentielle domine le polynôme".