

SÉRIE 1

1. Démontrer (par récurrence) les propositions suivantes :

(a) (i) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad$ (ii) $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ;$

(b) $n! \geq 2n - 1, \quad \forall n \geq 3 ;$

(c) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{binôme de Newton}).$

Indication : Prouver et utiliser la relation $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}, \quad 1 \leq i \leq n.$

On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n,$ où $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0! = 1.$

2. Démontrer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes de la valeur absolue :

(a) $|xy| = |x||y| ;$

(b) $|x| = \sqrt{x^2} ;$

(c) $|x+y| \leq |x| + |y| ;$

(d) $|x-y| \geq ||x| - |y|| ;$

(e) $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ si $x \neq 0.$

3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2-x} = x.$

(b) Soit une équation de la forme $E(x) = 0, x \in D \subset \mathbb{R}$ (le domaine où l'expression $E(x)$ est définie), et S l'ensemble de ses solutions. Que peut-on conclure après un raisonnement du type

$$E(x) = 0, x \in D \implies \dots (\text{calculs}) \dots \implies x \in A ?$$

Et s'il on a partout des équivalences au lieu des implications ?

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < x-1 ;$

(b) $|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1.$

5. Prouver que l'équation $x^2 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}_+ := \{r \in \mathbb{Q} ; r \geq 0\}.$

Indication : Commencer par démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, n est pair (resp. impair) ssi n^2 est pair (resp. impair).