

SÉRIE DE NOËL (★)

1. On considère la surface $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ (cor de Gabriel) engendrée par la rotation de l'arc de courbe

$$\left\{ (x, y, z) = \left(x, \frac{1}{x}, 0 \right) ; 1 \leq x < \infty \right\}$$

autour de l'axe Ox .

- (a) Montrer que le volume du domaine délimité par $\mathcal{C}$ et par le plan d'équation $x = 1$ vaut π .
 (b) Montrer que l'aire de $\mathcal{C}$ est infinie.

2. Pour $x > 0$, on définit la *fonction gamma* par $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$.

Prouver les propriétés suivantes :

- (a) l'intégrale est convergente pour tout $x > 0$ (distinguer les cas $x \leq 1$ et $x > 1$) ;
 (b) $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$;
 (c) $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Etudier la convergence de $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ (intégrales de Bertrand) en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Comparer le résultat avec l'exercice 3 (c), série 6 (séries de Bertrand).

4. Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$.

- (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = \pi/4$.
Indication : On calculera $g'(x)$ en "dérivant sous l'intégrale" (sans justification).

- (b) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$ (intégrales de Wallis).

- (a) Donner une expression explicite de I_{2k} et I_{2k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Indication : Calculer I_0, I_1 , puis intégrer par parties.

- (b) Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.

Indication : Montrer que $I_{n-1} \geq I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser (a).

- (c) Dédurre de (a) et (b) la formule de Wallis : $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (2k-2) \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \right]^2 = \pi$.

Puis montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- (d) A l'exercice 4, série 10, on a prouvé qu'il existe $\ell \in (e^{-1}, \infty)$ tel que $n! \sim \ell^{-1} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$ ($n \rightarrow \infty$). Utiliser (c) pour montrer que $\ell^{-1} = \sqrt{2\pi}$, d'où la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$ ($n \rightarrow \infty$).

6. Le but de cet exercice est de prouver la formule $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (problème "de Bâle", Euler 1741).

- (a) Calculer l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

- (b) Prouver que $\arcsin(x) = x + \sum_{k=1}^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $\forall x \in (-1, 1)$.

Indication : Le résultat de l'exercice 1 (b) (iii), série 12, reste vrai pour $x \in (-1, 1)$ et $\alpha < 0$.

- (c) En déduire que $\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$ et conclure.

Indication : On pourra calculer $\int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ en se ramenant à une intégrale de Wallis.