

SÉRIE 13

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de $f|_{(a,b)}$. Montrer qu'il existe une primitive $\tilde{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de f telle que $F = \tilde{F}|_{(a,b)}$ et $\tilde{F}(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$.

2. Calculer la dérivée de la fonction $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \int_{1/t}^t \frac{\ln x}{x+1} dx$.

3. Calculer les primitives suivantes en précisant leur domaine de définition :

- (a) $\int x e^x dx$; (b) $\int x^2 e^x dx$; (c) $\int \ln x dx$; (d) $\int \ln^2 x dx$; (e) $\int x^\alpha \ln x dx$ ($\alpha \in \mathbb{R}$);
 (f) $\int x \ln^2 x dx$; (g) $\int e^x \sin x dx$; (h) $\int e^x \cos x dx$; (i) $\int x \cos x dx$; (j) $\int x^2 \cos x dx$;
 (k) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$; (l) $\int \arctan x dx$; (m) $\int \arcsin x dx$; (n) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Indication : Intégration par parties.

4. Calculer les primitives suivantes :

- (a) $\int \cos(\sqrt{x}) dx$ sur chacun des intervalles $(0, \infty)$ et $[0, \infty)$;
 (b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1} dx$ sur chacun des intervalles $(-1, \infty)$ et $[-1, \infty)$;
 (c) $\int \frac{x-1}{x-2\sqrt{x-1}} dx$ sur chacun des ensembles $[1, 2)$, $(2, \infty)$ et $[1, 2) \cup (2, \infty)$.

Indication : Changement de variable.

5. Calculer $\int \frac{1}{2+\cos x} dx$ sur $(-\pi, \pi)$ et sur $\mathbb{R}$.

6. (a) Déterminer les primitives suivantes, pour tout $k \in \mathbb{R}$: (i) $\int \frac{1}{t^2+k^2} dt$; (ii) $\int \frac{1}{t^2-k^2} dt$.

(b) Utiliser ces résultats pour montrer que, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

- si $b^2 - 4ac < 0$: $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C$;
 — si $b^2 - 4ac = 0$: $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = -\frac{2}{2ax + b} + C$;
 — si $b^2 - 4ac > 0$: $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C$.

(c) Calculer : (i) $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx$; (ii) $\int \frac{2x-1}{x^2+x+1} dx$.

7. (★) Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés, on considère les intégrales indéfinies

$$I_n(t) = \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer I_1 et I_2 .

(b) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} , pour tout $n \geq 2$.