

SÉRIE 10

1. Montrer que $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$.

2. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cotan^2(x) \right); \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\alpha} - e \right] \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

3. (a) Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, étudier la monotonie de la fonction $f_\alpha : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = (x+\alpha) \ln(1+1/x)$.

(b) Prouver que la suite $(e_n(\alpha))_{n \geq 1}$ définie par $e_n(\alpha) = (1 + 1/n)^{n+\alpha}$ est strictement décroissante pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$ et strictement croissante pour $\alpha \leq \frac{1}{3}$. En déduire que

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1/3} < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque : Noter le lien entre les inégalités ci-dessus et l'indication de l'exercice 5 (a), série 5.

4. On pose $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n$ et $y_n = \ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Prouver que $y_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la série $\sum_{n \geq 1} y_n$ est convergente.

(b) Déduire du point (a) que $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante qui converge vers une limite $\ell \in (e^{-1}, \infty)$.

Remarque : Nous calculerons la valeur exacte de ℓ dans un prochain exercice, ce qui nous fournira une estimation précise de $n!$ par des fonctions élémentaires lorsque $n \rightarrow \infty$.

5. Soit $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{e^{x^3 \sin(1/x^2)} - 1}{x}$. Montrer que la règle de Bernoulli–l'Hospital ne permet pas de calculer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et trouver un autre moyen de calculer cette limite.

6. Trouver dans chaque cas le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de $x = 0$:

$$(a) f(x) = \cos^2 x, \quad n = 3; \quad (b) f(x) = \sin^3 x, \quad n = 5; \quad (c) f(x) = \tan x, \quad n = 5;$$

$$(d) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x + 1}, \quad n = 2; \quad (e) f(x) = \sin(\sin x), \quad n = 5; \quad (f) f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}, \quad n = 3.$$

7. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$

Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et caractériser tous les extrema de f .

Indication : On pourra résoudre graphiquement l'équation $\tan x = x$.

8. Étudier les fonctions suivantes (domaine, asymptotes, régions de croissance/décroissance, convexité/concavité, points de minimum/maximum, points d'inflexion, zéros) :

$$(a) f(x) = x + \sqrt{1-x}; \quad (b) f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}; \quad (c) f(x) = \frac{x^3}{x^2-1};$$

$$(d) f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad (e) f(x) = (x+2)e^{1/x}.$$

Remarque : Si l'on ne sait pas les déterminer exactement, on pourra localiser les zéros approximativement en se servant du théorème de la valeur intermédiaire.