

Un peu de langage mathématique



1 La Phrase mathématique

1.1 Les Assertions

Dans l’imaginaire collectif, les mathématiques sont souvent considérées comme la science des nombres et du calcul. Ce n’est pas complètement faux, mais il manque l’essentiel. Les mathématiques, ce sont avant tout des raisonnements. Il s’agit, à partir d’hypothèses bien précises et en progressant grâce à des liens logiques, d’essayer de déterminer ce qui est vrai et ce qui est faux. Pour cela, un calcul peut effectivement être nécessaire...

Ainsi, plus que des nombres ou des équations, le(la) mathématicien(ne) manipule des assertions :

Définition 1.1. On appellera **assertion** une phrase syntaxiquement correcte, ayant un sens, et dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse.

Une assertion peut s’exprimer en langage courant (en français ici, en anglais dans la plupart des publications scientifiques, etc.) ou en symboles mathématiques (on introduira les plus fréquents dans ce chapitre, d’autres viendront au fur et à mesure des besoins). Ainsi, l’assertion

« *Le carré de tout réel est un réel positif* »

(qui est vraie) pourra aussi s’écrire

$$« \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0 ».$$

On prendra garde, en écrivant un raisonnement, à ce que les assertions soient effectivement des assertions. Ainsi il n’est pas possible d’écrire des « phrases » se réduisant à

$$« 9 - 6 \times 5 »$$

ou

« *Les entiers qui peuvent s’écrire comme la somme de deux carrés* ».

Ce ne sont pas des phrases mathématiques, et cela n'a pas de sens de dire qu'elles sont vraies ou fausses. Par contre, on sera régulièrement amené à manipuler des assertions fausses, ou des assertions dont on ne sait pas si elles sont vraies ou fausses. Par exemple :

« *Pierre de Fermat savait démontrer le théorème de Fermat.* »

Certaines assertions peuvent dépendre d'un paramètre¹. Ainsi la phrase

« *Il est né un 29 février* »

peut être vraie ou fausse, selon à qui renvoie le pronom personnel « il ». De même, l'assertion

« $x^2 > 4$ »

est vraie si x vaut 3 mais fausse si x vaut 1.

Exercice 1. Pour chacune des phrases suivantes, dire s'il s'agit d'une assertion, éventuellement dépendant d'un paramètre, et, si c'est le cas, préciser si elle est vraie ou fausse.

- Il y a au moins 100 étudiants cette année en L1 PS.
- $0 + 0$
- Libreville est la capitale du Gabon.
- Elle lui a dit hier.
- $x < y$.
- Un des étudiants de L1 PS est né à Toulouse.
- Tous les étudiants de L1 PS sont nés à Toulouse.

Lorsqu'on utilise une assertion dépendant d'un paramètre, ce paramètre peut être fixé par le contexte, auquel cas il n'y a pas d'ambiguïté. Lorsqu'on écrit

« *Arthur est un glomorphe à rayures étonnant.*
Il peut changer l'orientation de ses rayures. »

le sens de la deuxième phrase dépend du pronom personnel « il », mais il n'y a pas d'ambiguïté car avec la première phrase on sait qu'il se rapporte à Arthur le glomorphe à rayures. De même, l'assertion $x^2 > 4$ est vraie sans ambiguïté dans le contexte suivant :

« *Soit $x > 2$. Alors on a $x^2 > 4$.* »

Dans une démonstration, il est important que toutes les variables utilisées aient été auparavant introduites (on y reviendra).

1.2 Négation, disjonction, conjonction

Définition 1.2. La négation (non P) d'une assertion P est l'assertion qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Par exemple la négation de l'assertion

« *Le cheval blanc de Henri IV est blanc.* »

est

« *Le cheval blanc de Henri IV n'est pas blanc.* ».

1. En général on parle de *prédicat* pour désigner une assertion qui dépend d'un paramètre. On n'utilisera pas ce terme ici.

Cette notion, comme celles qui viendront ensuite, est particulièrement parlante lorsqu'on manipule des assertions dépendant d'un paramètre. Ainsi la négation de

$$\ll x > 0 \gg$$

est

$$\ll x \leq 0 \gg$$

(ici il est sous-entendu que x est un réel). Les deux peuvent être vraies ou fausses, mais si l'une est vraie alors l'autre est forcément fausse, et inversement.

Remarque 1.3. Si P est une assertion, alors $\text{non}(\text{non } P)$ est P .

Exercice 2. Donner la négation des assertions suivantes :

- $2+2=4$
- $7-3$
- Il aura une note supérieure ou égale à 12 à l'examen final.
- Il viendra après 9h.
- Il a toujours été grand pour son âge.
- Il a un oncle qui joue au rugby au Stade Toulousain.

Définition 1.4. On considère deux assertions P et Q .

- (i) L'assertion « P ou Q » (que l'on peut noter $P \vee Q$) est l'assertion qui est vraie si au moins l'une des deux assertions P ou Q est vraie, et fausse si P et Q sont fausses.
- (ii) L'assertion « P et Q » (que l'on peut noter $P \wedge Q$) est l'assertion qui est vraie si P et Q sont vraies, et fausse si au moins l'une des deux assertions P ou Q est fausse.

Par exemple l'ensemble des réels x vérifiant l'assertion

$$\ll x \geq 0 \text{ et } x \leq 1 \gg$$

est l'ensemble des réels compris entre 0 et 1. Il est important de noter que le « ou » est inclusif, ainsi l'assertion

$$\ll \text{il prend du fromage} \gg \text{ ou } \ll \text{il prend du dessert} \gg$$

est vraie s'il prend à la fois du fromage ou du dessert.

Enfin, les négations de ces deux assertions sont respectivement

$$x < 0 \text{ ou } x > 1$$

et

$$\ll \text{il ne prend pas de fromage} \gg \text{ et } \ll \text{il ne prend pas de dessert} \gg$$

Plus généralement on a le résultat suivant.

Proposition 1.5. Soient P et Q deux assertions. Alors

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ a même valeur logique que } (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$$

et

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \text{ a même valeur logique que } (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$$

Il est bon de s'en convaincre sur les exemples. Pour démontrer cette proposition, il suffit d'envisager tous les cas possibles selon que P et Q sont vraies ou fausses. Pour cela on peut par exemple établir la table de vérité des assertions considérées. Par exemple les tables de vérité de « non (P ou Q) » et « ($\text{non } P$) et ($\text{non } Q$) » coïncident et sont données par

non (P ou Q)	P vraie	P fausse	($\text{non } P$) et ($\text{non } Q$)	P vraie	P fausse
Q vraie	F	F	Q vraie	F	F
Q fausse	F	V	Q fausse	F	V

Exercice 3. Écrire les tables de vérité de non (P et Q) et ($\text{non } P$) ou ($\text{non } Q$).

1.3 Implications, équivalences, réciproque, contraposée

On considère l'assertion

$$\text{« } S'il \text{ pleut, (alors) il prend son parapluie »}. \quad (1.1)$$

Elle est formée à partir des assertions « il pleut » et « il prend son parapluie ». Même si on sait que l'assertion (1.1) est vraie, on ne peut pas dire s'il pleut ou non. On ne peut pas dire non plus s'il a pris ou non son parapluie. Par contre si on sait *aussi* qu'il pleut, alors on peut *déduire* qu'il a pris son parapluie. Finalement, la seule situation qui est exclue par (1.1) est celle où il pleut mais où il ne prend pas son parapluie. Mais il se peut qu'il n'ait pas pris son parapluie, il se peut également qu'il ne pleuve pas mais qu'il prenne quand même son parapluie (on n'est jamais trop prudent).

Prenons maintenant l'exemple suivant, où x est un réel :

$$\text{« } Si \ x \geq 2 \text{ alors } x^2 \geq 4 \text{ »}.$$

Cette assertion est vraie. Pourtant la conséquence $x^2 \geq 4$ peut être fausse (par exemple pour $x = 1$). D'autre part on peut avoir $x^2 \geq 4$ même si l'assertion $x \geq 2$ n'est pas vraie (par exemple pour $x = -3$). Tout ce que dit cette assertion est qu'il est impossible d'avoir à la fois $x \geq 2$ et $x^2 < 4$.

Définition 1.6. Étant données deux assertions P et Q , l'assertion « **Si** P **alors** Q », ou « P **implique** Q » a même valeur logique que

$$\text{non } (P \text{ et non } Q).$$

Cette assertion est notée

$$P \implies Q.$$

Exercice 4. Écrire la table de vérité pour l'assertion $P \implies Q$.

$P \implies Q$	P vraie	P fausse
Q vraie		
Q fausse		

Définition 1.7. Étant données deux assertions P et Q , on appelle **réciproque** de l'implication $P \implies Q$ l'assertion $Q \implies P$.

Ce n'est pas parce qu'une implication est vraie que sa réciproque est vraie ou fausse. . .

Exercice 5. Écrire la table de vérité de l'assertion $Q \implies P$, et la comparer avec celle de $P \implies Q$.

Définition 1.8. On dit que deux assertions P et Q sont **équivalentes** si $P \implies Q$ et $Q \implies P$. L'assertion « P et Q sont équivalentes » est notée

$$P \iff Q.$$

Exercice 6. Écrire la table de vérité de l'assertion $P \iff Q$.

Exercice 7. Écrire la table de vérité de l'assertion $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$, et la comparer avec celle de $P \implies Q$.

Proposition-Définition 1.9. Soient P et Q deux assertions. On appelle **contraposée** de l'implication $P \implies Q$ l'assertion $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$. Une implication et sa contraposée sont équivalentes. En symboles,

$$(P \implies Q) \iff ((\text{non } Q) \implies (\text{non } P)).$$

Par exemple, la contraposée de (1.1) peut s'écrire

« *S'il ne prend pas son parapluie alors il ne pleut pas* »

Attention à ne pas confondre l'implication avec un lien de causalité. On n'est pas en train de dire que c'est l'absence de parapluie qui provoque l'absence de pluie, on dit simplement que si on sait qu'il n'a pas pris de parapluie, alors on peut en déduire qu'il ne pleut pas.

La notion de contraposée est importante. En effet, lorsque l'on doit montrer une implication, il est parfois plus simple de montrer sa contraposée. Puisque les deux implications sont équivalentes, cela permet bien de conclure.

Exercice 8. Donner les réciproques et contraposées des assertions suivantes :

- Si tu as gagné, tu as joué.
- Si les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC sont orthogonaux, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

1.4 Quantificateurs

Si on écrit

$$\text{« } 2x^2 - 1 > 0 \text{ »,}$$

on obtient une assertion qui dépend de x réel. À partir de cette assertion, on peut construire les deux nouvelles assertions

$$\text{« Pour tout } x \text{ réel on a } 2x^2 - 1 > 0 \text{ »}$$

et

$$\text{« Il existe } x \text{ réel tel que } 2x^2 - 1 > 0 \text{ ».}$$

On note que la première est fausse (on peut trouver un x réel pour lequel l'assertion $2x^2 - 1$ est contredite, par exemple $x = 0$), tandis que la seconde est vraie (on peut effectivement trouver un réel x pour lequel l'assertion est vraie, par exemple $x = 1$).

- Définition 1.10.** (i) Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » ou « pour n'importe quel ».
(ii) Le symbole $\exists$ signifie « il existe ». Après le symbole $\exists$, on peut omettre le « tel que » qui est alors sous-entendu.

Ainsi les deux assertions précédentes peuvent s'écrire

$$\ll \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 1 > 0 \gg$$

et

$$\ll \exists x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 1 > 0 \gg.$$

On introduira un peu plus loin le symbole $\in$, qui signifie « appartenant à ». On introduira également le symbole $\mathbb{R}$ qui désigne l'ensemble des réels.

Remarque 1.11. Une variable intervenant dans un quantificateur est muette. Cela signifie qu'on peut la changer pour une autre variable sans changer le sens. Ainsi

$$\ll \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \gg \text{ est équivalent à } \ll \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0 \gg$$

Dans les deux cas, cela signifie que le carré de tout réel est positif. Il faut prendre garde à ne pas utiliser une variable qui a déjà une autre signification dans le contexte.

Une assertion peut tout à fait contenir plusieurs symboles $\forall$ et/ou $\exists$. Attention tout de même au sens. Par exemple les assertions

$$\ll \text{Toutes les nuits, il y a un chien qui aboie} \gg$$

et

$$\ll \text{Il y a un chien qui aboie toutes les nuits} \gg$$

ne signifient pas la même chose. Il en est de même pour

$$\ll \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq x \gg$$

et

$$\ll \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \geq x \gg.$$

D'ailleurs la première est vraie alors que la seconde est fausse (pourquoi?).

Ainsi, si E et F sont deux ensembles et $P(x, y)$ est une assertion dépendant de $x \in E$ et $y \in F$, alors les deux assertions

$$\ll \forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x, y) \gg$$

et

$$\ll \exists y \in F, \forall x \in E, \quad P(x, y) \gg$$

ne sont en général pas équivalentes. Par contre, les deux assertions

$$\ll \forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x, y) \gg \quad \text{et} \quad \ll \forall y \in F, \forall x \in E, \quad P(x, y) \gg$$

sont bien équivalentes. Cela vaut également en remplaçant les « $\forall$ » par des « $\exists$ ».

Attention également à la négation des assertions contenant des quantificateurs. Le contraire de

« *Tous les chemins mènent à Rome* »

n'est pas

« *Aucun chemin ne mène à Rome* »,

car ces deux assertions peuvent être simultanément fausses. La négation est plutôt

« *Il existe un chemin qui ne mène pas à Rome* ».

Proposition 1.12. Soit P une assertion dépendant de $x \in E$. Alors la négation de

« $\forall x \in E, \quad P(x)$ »

est

« $\exists x \in E, \quad \text{non } P(x)$ »,

et la négation de

« $\exists x \in E, \quad P(x)$ »

est

« $\forall x \in E, \quad \text{non } P(x)$ »,

Avec cette propriété, on peut déterminer la négation d'assertions contenant plusieurs quantificateurs. Par exemple la négation de

« $\forall \varepsilon \in]0, \infty[, \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon \geq R$ »

(qui est une assertion dépendant de R , toujours vraie) est

« $\exists \varepsilon \in]0, \infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon < R$ »

(qui est donc toujours fausse).

Exercice 9. Donner la négation des assertions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
- Tout le monde a besoin de tout le monde.
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x \geq y$.

2 Ensembles et applications

Dans notre quête d'un langage clair et précis pour parler de maths, impossible de ne pas s'attarder un minimum sur les ensembles et les applications.

Intuitivement, un **ensemble** est une collection d'objets, qui sont eux-même appelés **éléments** de cet ensemble. L'ensemble des entiers, l'ensemble des réels positifs, l'ensemble des lettres de l'alphabet, l'ensemble des Françaises nées en 2006, l'ensemble des étudiants du groupe, l'ensemble des groupes de L1, l'ensemble des filières de l'université, etc., sont des exemples d'ensembles. Avec cette définition qui n'en est pas une, on fait déjà une entorse à notre soif de rigueur et de précision, mais l'axiomatique de la théorie des ensembles est très compliquée (il y a même un axiome qui fait débat au sein de la communauté). Notre but ici n'est pas du tout d'entrer dans ce genre de subtilités mais

d'introduire le vocabulaire de base pour manipuler ces ensembles.

Lorsque x est un élément de l'ensemble E , on note

$$x \in E.$$

Lorsque ce n'est pas le cas, on note

$$x \notin E.$$

L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide** et est noté $\emptyset$.

2.1 Définir un ensemble.

On n'a pas défini précisément la notion d'ensemble mais il faut savoir comment définir un ensemble concret. On peut définir un ensemble en énumérant ses éléments. Ainsi l'ensemble des entiers compris entre 1 et 6 peut se noter

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

L'ordre dans lequel on a énuméré les éléments ne joue aucun rôle, ainsi on a

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

On peut s'autoriser des raccourcis :

$$\{1, 2, \dots, 48\}.$$

L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

L'ensemble des entiers relatifs est $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

L'ensemble des réels est $\mathbb{R}$ (il n'est pas possible d'énumérer l'ensemble des réels, même par une liste infinie...). On note que même si on les connaît bien, on n'a pas *défini* proprement les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. C'est abordable au niveau L1, mais ce n'est pas l'objet de ce petit paragraphe.

A partir d'ensembles connus il y a plusieurs façons de définir de nouveaux ensembles plus subtils. Par exemple on peut définir l'ensemble des entiers pairs par

$$\{2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

(l'ensemble des $2n$ pour n parcourant l'ensemble $\mathbb{Z}$) ou par

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ divise } n\}$$

(l'ensemble des entiers n tels que 2 divise n). Dans tous les cas, les accolades sont de rigueur. Par contre, la ponctuation utilisée au sein des accolades (ici la virgule ou la barre verticale) peut varier et vous pourrez voir d'autres conventions dans d'autres textes.

Exercice 10. Définir l'ensemble des entiers positifs impairs

2.2 Inclusion, complémentaire, intersection, union.

Définition 2.1. Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble A **est inclus dans** E si tout élément de A est aussi un élément de E . On dit aussi que A est une **partie** de E , ou que E contient A . Dans ce cas on note

$$A \subset E.$$

On dit que deux ensembles E et F sont égaux si tout élément de l'un est aussi élément de l'autre :

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Exemple 2.2. L'ensemble des entiers pairs est une partie de $\mathbb{Z}$.

Remarque 2.3. Souvent, la meilleure stratégie pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux est effectivement de montrer que E est inclus dans F , puis que F est inclus dans E .

Proposition 2.4. Soient E , F et G trois ensembles.

- (i) On a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.
- (ii) Si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.

Définition 2.5. Soit E un ensemble. Alors on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Exemple 2.6. On a

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Définition 2.7. Soient E un ensemble et A une partie de E . On appelle **complémentaire de A dans E** et on note $E \setminus A$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Exemple 2.8. On pourra noter $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Proposition 2.9. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E .

- (i) On a $E \setminus \emptyset = E$ et $E \setminus E = \emptyset$.
- (ii) On a $A = E \setminus (E \setminus A)$.
- (iii) On a $A \subset B$ si et seulement si $(E \setminus B) \subset (E \setminus A)$.

Définition 2.10. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . L'**intersection** $A \cap B$ de A et de B est l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Proposition 2.11. Soient E un ensemble et A , B et C des parties de E .

- (i) On a $A \cap B = B \cap A$.
- (ii) On a $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. On peut donc simplement écrire $A \cap B \cap C$.
- (iii) On a $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap E = A$.
- (iv) On a $A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$.

Définition 2.12. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . L'**union** $A \cup B$ de A et de B est l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Le « ou » est inclusif. Ainsi si $x \in E$ est à la fois dans A et dans B , il est bien dans $A \cup B$:

$$A \cap B \subset A \cup B.$$

Proposition 2.13. Soient E un ensemble et A , B et C des parties de E .

- (i) On a $A \cup B = B \cup A$.
- (ii) On a $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. On peut donc simplement écrire $A \cup B \cup C$.
- (iii) On a $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup E = E$.
- (iv) On a $A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$.

Proposition 2.14. Soient E un ensemble et A , B et C des parties de E .

- (i) On a

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

et

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- (ii) On a

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$$

et

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

Exercice 11. Démontrer ces propriétés

On peut définir les unions et intersections d'un nombre quelconque d'ensembles.

Définition 2.15. Soit E un ensemble. Soit Λ un ensemble. Pour tout $j \in \Lambda$ on considère une partie E_j de E . Alors on note

$$\bigcup_{j \in \Lambda} E_j = \{x \in E \mid \exists j \in \Lambda, x \in E_j\}$$

et

$$\bigcap_{j \in \Lambda} E_j = \{x \in E \mid \forall j \in \Lambda, x \in E_j\}.$$

Définition 2.16. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . Alors on note

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap (E \setminus B).$$

Proposition 2.17. Soient E un ensemble et A et B deux parties de E .

- (i) On a $A \setminus A = \emptyset$ et $A \setminus \emptyset = A$.
- (ii) On a $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
- (iii) On a $A \setminus B = \emptyset$ si et seulement si $A \subset B$.

2.3 Produits d'ensembles

Si x et y sont deux objets, alors on définit un nouvel objet que l'on note (x, y) et que l'on appelle **couple** (x, y) . Ces couples sont tels que si on considère quatre objets x, y, x', y' alors

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

Définition 2.18. Soient E et F deux ensembles. Alors on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple 2.19. On a

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 12. Représenter géométriquement dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles $[0, 1] \times [-2, 2]$ et $[3, 4] \times \mathbb{R}$.

Si $k \geq 3$ et $E_1, \dots, E_k$ sont des ensembles, on a une définition analogue pour le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_k$. Si E est un ensemble et $k \in \mathbb{N}^*$ on note

$$E^k = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}}.$$

2.4 Applications

Soient E et F deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) f de E dans F est la donnée, pour chaque x dans E d'un unique élément $f(x)$ appartenant à F . L'ensemble E est alors l'ensemble de départ de f , tandis que F est son ensemble d'arrivée.

Exemples 2.20. (i) L'application qui à chaque étudiant du groupe associe sa taille en centimètre est une application de l'ensemble des étudiants du groupe dans l'ensemble des réels (positifs).

(ii) L'application qui à un entier naturel associe son carré est une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même. On peut la noter

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}, \\ n & \mapsto & n^2. \end{cases}$$

(iii) Soit E un ensemble. Alors on définit l'application **identité de** E par

$$\text{Id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow & E, \\ x & \mapsto & x. \end{cases}$$

(iv) Soient E un ensemble et A une partie de E . Alors on appelle **fonction caractéristique** de A l'application $\mathbb{1}_A$ de E dans $\{0, 1\}$ qui à $x \in E$ associe

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Définition 2.21. Soient f et g deux applications de E dans F . On dit que f et g sont égales, et on note $f = g$, si pour tout $x \in E$ on a $f(x) = g(x)$.

Exercice 13. On note $E = \{-1, 0, 1\}$. Parmi les fonctions de E dans $\mathbb{R}$ suivantes, lesquelles sont égales :

- $f_1 : x \mapsto x^2$,
- $f_2 : t \mapsto t^2$,
- f_3 telle que $f_3(-1) = 1$, $f_3(0) = 0$ et $f_3(1) = 1$,
- $f_4 : x \mapsto 2x^4 - x^6$.

Définition 2.22. Étant donnés deux ensembles E et F , l'ensemble des fonctions de E dans F sera noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

Définition 2.23. Soit f une application de E dans F et A une partie de E . Alors la restriction de f à A est par définition la fonction

$$f|_A : \begin{cases} A & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

2.5 Image, antécédents, image directe, image réciproque

Définition 2.24. Soit f une application de E dans F .

- Soit $x \in E$. Alors $f(x)$ est appelé **image de x par f** .
- Soit $y \in F$. Si $x \in E$ est tel que $f(x) = y$ alors on dit que x est un **antécédent de y par f** . Attention, un tel x n'existe pas forcément et, s'il existe, il n'est pas forcément unique.
- On appelle **graphe** de f l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in E\}.$$

C'est une partie de $E \times F$.

Remarque 2.25. Soit f une application de E dans F et $\Gamma \in \mathcal{P}(E \times F)$ le graphe de f . Alors pour $x \in E$ et $y \in F$ on a $f(x) = y$ si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$. En particulier pour tout $x \in E$ il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. Par contre pour $y \in F$ on n'a pas nécessairement ni existence ni unicité d'un $x \in E$ pour lequel $(x, y) \in \Gamma$.

Exercice 14. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ le graphe de l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 et illustrer la remarque précédente.

Définition 2.26. Soit f une application de E dans F .

- Soit A une partie de E . On appelle **image directe** de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F.$$

On appelle image de f l'ensemble $f(E)$.

- Soit B une partie de F . On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Exercice 15. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

Expliciter les ensembles suivants : $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\{2\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{-4\})$.

Proposition 2.27. Soient E et F deux ensembles, et f une fonction de E dans F .

(i) Soient B_1 et B_2 deux parties de F . Alors on a

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \quad (2.1)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \quad (2.2)$$

$$f^{-1}(F \setminus B_1) = E \setminus f^{-1}(B_1). \quad (2.3)$$

En outre si $B_1 \subset B_2$ alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(ii) Soient A_1 et A_2 deux parties de E . Alors on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

mais l'inclusion inverse est fausse en général.

Exercice 16. Démontrer la proposition précédente.

Exercice 17. On note G l'ensemble de tous les glomorphes à rayures. On note $m : G \rightarrow G$ l'application qui à un glomorphe à rayures associe sa mère. On définit de même l'application p qui à un glomorphe à rayures associe son père. Soit $g \in G$. Expliciter les ensembles suivants :

$$p^{-1}(\{g\}), m^{-1}(\{g\}), p(p^{-1}(\{g\})), p^{-1}(p(\{g\})), m^{-1}(p^{-1}(\{g\})), m(m(\{g\})), m(p^{-1}(\{g\})).$$

2.6 Composition de fonctions

Définition 2.28. Soient E , F et G trois ensembles. Soient f une fonction de E dans F et g une fonction de F dans G . Alors la **composée** ($g \circ f$) est l'application de E dans G qui à $x \in E$ associe $g(f(x))$.

On a une définition analogue pour la composée de plus de deux fonctions. En outre la compositions est associative : lorsque cela a un sens on a

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Remarque 2.29. Soit f une fonction de E dans F . Alors on a

$$f \circ \text{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \text{Id}_F \circ f = f.$$

Exemple 2.30. On considère les applications

$$f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

Alors pour $x \in]0, +\infty[$ on a

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(x^2) \quad \text{et} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\ln(x))^2.$$

Attention, dans le cadre général de la définition la composée $f \circ g$ n'a pas de sens !

△ Si f est une fonction de E dans F et g une fonction de F dans G alors on peut définir la fonction $(g \circ f)$ mais pas $(f \circ g)$ (à moins que G ne soit une partie de E).

Exercice 18. On considère l'ensemble G des glomorphes à rayures et les applications m et p comme au paragraphe précédent. Décrire les applications suivantes :

$$m \circ p, \quad p \circ m, \quad m \circ m, \quad p \circ p, \quad p \circ p \circ p.$$

2.7 Applications injectives, surjectives, bijectives

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F .

Définition 2.31. On dit que f est **injective** si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Autrement dit, tout élément de F admet **au plus un antécédent** par f .

Définition 2.32. On dit que f est **surjective** si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

Autrement dit, tout élément de F admet **au moins un antécédent** par f .

Exercice 19. Les applications de la partie 2.20 sont-elles injectives ? surjectives ? Même question avec les applications p et m de l'exercice de la partie 2.5.

Définition 2.33. On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit, tout élément de F admet **exactement un antécédent** par f .

Définition 2.34. Soit f une application bijective de E dans F . Alors on appelle bijection réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f .

$\triangle$ Bien que la notation utilisée soit la même, il ne faut pas confondre la fonction réciproque (qui, quand elle existe, associe à un *élément* de F un *élément* de E) avec l'image réciproque introduite au paragraphe 2.5 (qui existe toujours et associe à une *partie* de F une *partie* de E).

Proposition 2.35. Soit f une application de E dans F . Alors f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E telle que

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Dans ce cas l'application g est unique et est égale à f^{-1} .

Démonstration. On suppose que f est bijective. Soit $x \in E$. x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f , donc $f^{-1}(f(x)) = x$. Ceci étant valable pour tout $x \in E$, on a bien $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$. Soient maintenant $y \in F$ et $x \in E$ l'unique antécédent de y par f . Alors on a $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$, d'où $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$. Inversement, supposons qu'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$. Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. En composant avec g on obtient

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Cela prouve que f est injective. Soit $y \in F$. On note $x = g(y)$. Alors on a $y = f(g(y)) = f(x) \in f(E)$. Cela prouve que $F \subset f(E)$, et donc que f est surjective. Ainsi f est injective et surjective, donc bijective. En outre on a vu que g associe à tout $y \in F$ son antécédent par f , donc $g = f^{-1}$. $\square$

Proposition 2.36. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications bijectives. Alors la composée $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. On a

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G$$

et de même

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \text{Id}_F \circ f = \text{Id}_E.$$

Cela prouve que $(g \circ f)$ est inversible d'inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

2.8 Ensembles finis

Proposition-Définition 2.37. Soit E un ensemble. On dit que E est **fini** s'il existe une bijection entre E et $\{1, \dots, n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas n est unique et est appelé le **cardinal** (ou **nombre d'éléments**) de E . Il est noté $\text{Card}(E)$. Si E n'est pas fini on dit qu'il est infini. Par convention le cardinal de l'ensemble vide est 0.

La proposition suivante (admise) assure qu'un ensemble fini ne peut avoir qu'un seul cardinal :

Proposition 2.38. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. S'il existe une bijection entre $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, p \rrbracket$ alors $n = p$.

On admet ici les résultats suivants :

Proposition 2.39. Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F .

- (i) On suppose que E est fini. Alors $f(E)$ est fini et $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$, avec égalité si et seulement si f est injective.
- (ii) On suppose que E et F sont finis. Si f est injective on a $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$. Si f est surjective on a $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$. Par suite, si f est bijective alors on a $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.
- (iii) On suppose que E et F sont finis de même cardinal. Alors on a :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

3 Stratégies de démonstration

Dans cette partie on évoque brièvement différentes stratégies possibles pour démontrer un résultat. Un théorème est en général une implication, de la forme

$$A \implies B.$$

Autrement dit, si l'hypothèse A est vérifiée alors la conclusion B l'est également.

Les démonstrations des résultats du cours et les exercices associés fourniront de nombreux exemples tout au long du semestre.

3.1 Raisonnement direct

Le raisonnement le plus courant consiste simplement à partir de l'hypothèse A pour atteindre la conclusion B grâce à une succession d'implications.

3.2 Raisonnement par contraposée

On rappelle que l'implication $(A \implies B)$ est équivalente à sa contraposée ($\text{non } B \implies \text{non } A$). Celle-ci étant parfois plus agréable à montrer, il ne faut pas hésiter à démontrer la contraposée pour conclure que l'implication cherchée est bien vraie.

3.3 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer vraie la négation de la conclusion voulue et d'en déduire quelque chose de manifestement faux. Cela prouvera que l'hypothèse n'était pas valable, et donc que la négation de la conclusion visée est fausse. Plus précisément, on suppose $(A \text{ et non } B)$ et cherche à en déduire une assertion fausse.

Cela présente quelques similitudes avec le raisonnement par contraposée, mais ce n'est pas du tout la même chose (bien y réfléchir!).

Attention à la manipulation du raisonnement par l'absurde. On part de quelque chose de faux, on veut aboutir à quelque chose de faux, et toutes les étapes intermédiaires sont des assertions fausses. On ne peut donc pas se fier à son intuition, et quand le raisonnement devient un peu long on a vite fait de s'y perdre. Prudence donc!

Quand on se lance dans la rédaction d'un raisonnement par l'absurde, c'est une bonne idée se demander s'il ne serait finalement pas plus simple de tout reformuler en un raisonnement direct ou par contraposée.

3.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est spécifique à la démonstration d'une propriété dépendant d'un paramètre dans $\mathbb{N}$ (ou éventuellement dans un intervalle d'entiers). Le principe est basé sur la construction même de l'ensemble $\mathbb{N}$, défini à partir d'un élément de départ et de ses « successeurs ». Si on veut montrer une assertion de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n),$$

il suffit de montrer que $P(0)$ est vraie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (P(n) \implies P(n+1)).$$

En effet, dans ce cas, puisque $P(0)$ est vraie et que $P(0) \implies P(1)$, on déduit que $P(1)$ est vraie, puis $P(1) \implies P(2)$ donc $P(2)$ est vraie, etc. C'est le principe des dominos, si on voit que le premier tombe et si on sait que la chute de l'un entraîne la chute du suivant, on peut conclure qu'ils vont tous tomber.

Attention à la rédaction d'un raisonnement par récurrence, on a vite fait d'écrire quelque chose qui n'est pas correct (ou qui ne prouve rien).

Exemple 3.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $u_0 \geq 0$. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution possible : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \geq 0$. Pour $n = 0$ on a bien $u_0 \geq 0$ par hypothèse. On suppose maintenant le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$ (où $n \geq 1$). Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante on a

$$u_n \geq u_{n-1}.$$

Par ailleurs, on a par hypothèse de récurrence :

$$u_{n-1} \geq 0.$$

On obtient donc

$$u_n \geq u_{n-1} \geq 0.$$

D'où le résultat par récurrence.

Étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut également montrer par récurrence une assertion de la forme

$$\forall n \geq n_0, \quad P(n).$$

On procède de la même façon, sauf que l'initialisation se fait en montrant $P(n_0)$. Légèrement plus subtil, on peut même parfois ne montrer la propriété que pour un nombre fini d'entiers n , auquel cas il faut arrêter la récurrence à un certain rang.

3.5 Disjonction de cas

Lorsque l'on doit montrer qu'une propriété dépendant de x dans un ensemble E est toujours vraie, on peut avoir à utiliser des démonstrations différentes pour différentes sous-parties de E . Si E_1 et E_2 sont des parties de E telles que $E = E_1 \cup E_2$, et que l'on montre séparément qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour $x \in E_1$ et pour $x \in E_2$, alors on a démontré qu'elle est vraie pour tout $x \in E$.

4 Rédiger une démonstration

On regroupe ici quelques conseils généraux qu'il est bon d'avoir en tête au moment d'écrire une démonstration. La liste pourra être augmentée au fur et à mesure du semestre...

4.1 Premier conseil de rédaction : rédigez !

Une suite de lignes de calculs sans aucun lien logique ne constituera *jamais* une démonstration.

4.2 De l'intérêt du « donc »

Comparons les deux phrases

« *S'il pleut, alors il prend son parapluie* »

et

« *Il pleut, donc il prend son parapluie* ».

La première phrase est une implication. On a vu que même si cette implication est vraie, il se peut très bien qu'il ne prenne pas son parapluie. Dans la deuxième phrase, on commence par affirmer qu'il pleut, puis on en déduit qu'il prend son parapluie (en faisant cela, on sous-entend que l'implication de la première phrase est vraie, ce qui devra donc avoir été démontré auparavant). Dans le deuxième cas, on affirme donc qu'il prend son parapluie. La différence est importante.

Dans la démonstration d'un théorème, on suppose en général que toutes les hypothèses sont vraies, et on cherche à en *déduire* la conclusion. On utilisera donc très souvent le mot « donc » (ou des synonymes, comme « d'où », « on en déduit que », « par conséquent », etc.).

Puisque le symbole « $\implies$ » est quant à lui utilisé pour l'implication, il n'apparaîtra finalement que très rarement dans les démonstrations (ce qui ne signifie pas « jamais », mais quand on l'utilise cela vaut la peine de prendre 10 secondes pour vérifier que c'est effectivement pertinent).

Attention donc à ne pas utiliser le symbole « $\implies$ » comme raccourci pour le mot « donc ». Il n'y a pas de symbole pour « donc », mais c'est un mot très court alors écrivez-le, tout simplement !

Exercice 20. Comparer les phrases suivantes :

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } \quad x \geq 2 \quad \text{donc} \quad x^2 \geq 4$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 2 \quad \implies \quad x^2 \geq 4.$$

4.3 Introduire les variables

On a vu qu'on ne peut pas dire qu'une phrase telle que

$$\ll x^2 > 0 \gg$$

énonce une propriété vraie ou fausse, puisque cela dépend de la valeur prise par x . Si on précise que x vaut 2, on peut alors dire qu'il s'agit d'une assertion vraie, tandis que si x vaut 0 il s'agit d'une assertion fausse. Mais en général, si on utilise une variable c'est justement qu'on ne veut pas spécifier sa valeur, par exemple parce qu'on veut démontrer une propriété pour tout x dans un certain ensemble. Dans ce cas, il est possible de spécifier à chaque étape l'ensemble des x avec lesquels on travaille :

$$\ll \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x^2 > 0 \gg.$$

Mais cela peut amener des raisonnements lourds. Une autre possibilité est de considérer une seule valeur de x pour tout le raisonnement, mais sans spécifier laquelle. Ainsi on pourra écrire :

$$\ll \text{Soit } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ On a } x^2 > 0. \gg$$

La première phrase permet de dire qu'on fixe une valeur de x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, même si on ne spécifie pas laquelle. A partir de là, x est considéré comme fixé par le contexte, et la phrase « $x^2 > 0$ » est bien une assertion, quelle que soit la valeur de x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Et tout ce qu'on aura montré pour cette *valeur quelconque* de x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sera bien démontré pour *toute valeur* de x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Une variable peut déjà être fixée dans l'énoncé du théorème (ou du problème). Mais si ce n'est pas le cas, il faut le faire dans la démonstration.

5 Divers

5.1 Sommes et produits

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels (ou des éléments de tout ensemble sur lequel est définie une addition). Alors on note

$$\sum_{j=1}^n a_j := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

C'est la **somme pour j allant de 1 à n des a_j** . Dans cette expression, le « j » est une variable muette. On peut choisir un autre nom sans rien changer à la valeur de la somme (ce n'est pas le cas du « n », la différence est que n apparaît dans l'expression de droite, alors que j a été remplacé par les différents indices). C'est une variable qui ne doit pas déjà être utilisée pour autre chose dans le contexte où est écrit cette somme. Ainsi,

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k,$$

mais on ne peut pas écrire quelque chose comme : « Soit $j \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{j=1}^4 j = 10 \text{ »}.$$

La somme n'a aucune raison de partir de l'indice 1. On peut partir de 0, ou en fait de n'importe quel entier. Une somme vide (pour laquelle on ne somme sur aucun indice) est par convention égale à 0.

Exercice 21. 1. Écrire sans le symbole $\sum$, puis calculer, les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^4 2^k, \quad \sum_{k=1}^n 1, \quad \sum_{j=1}^n k, \quad \sum_{j=0}^n n, \quad \sum_{l=3}^6 l.$$

2. Écrire sous forme condensée les sommes suivantes :

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + (n-1)^2 + n^2, \quad 2 + 4 + 8 + 10 + \cdots + 118 + 120.$$

On définit exactement de la même façon le **produit pour j allant de 1 à n des a_j** :

$$\prod_{j=1}^n a_j := a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

Par convention un produit vide est considéré comme égal à 1.

6 Exercices

Exercice 22. Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F .

1. On suppose qu'il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = \text{Id}_F$. Montrer que f est surjective.

2. On suppose qu'il existe une application h de F dans E telle que $h \circ f = \text{Id}_E$. Montrer que f est injective.

3. On suppose qu'il existe deux applications g et h de F dans E telles que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $h \circ f = \text{Id}_E$. Montrer que f est bijective et $g = f^{-1} = h$.