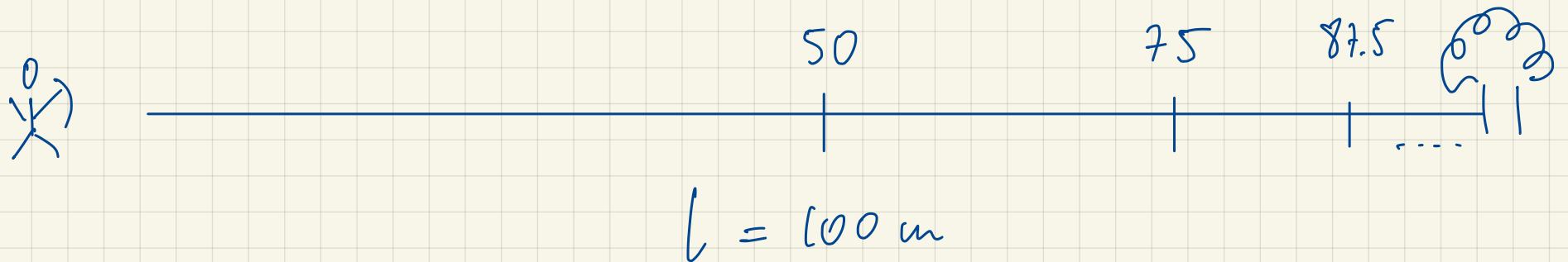


Un paradoxe à la Zénon (390-330 avant J.C.)

Un archer tire une flèche contre un arbre à une distance de 100m. Après un certain temps, la flèche a parcouru 50m, puis $50 + 25$, $50 + 25 + 12.5$, ...



Le mouvement se décompose en une infinité d'étapes, à chaque étape on ajoute une distance positive

$\Rightarrow$ la distance totale est infinie !

Erreur de ce raisonnement : une somme infinie de distances positives peut être finie !

Résolu définitivement par l'analyse rigoureuse
(Cauchy, Weierstrass - 19^{ème} siècle)

Série géométrique : On écrit

$$\begin{aligned} 50 + 25 + 12.5 + \dots &= \frac{100}{2} + \frac{100}{4} + \frac{100}{8} + \dots \\ &= 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 100 \left(-1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}_{= \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots} \right) \end{aligned}$$

Problème plus général : soit $r > 0$ un nombre positif quelconque fixé

On note S_n la somme partielle des $n+1$ premiers termes :

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n.$$

On va écrire S_n de manière astucieuse. En multipliant des deux côtés par r , on a

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

$$r \cdot S_n = r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n - rS_n = 1 - r^{n+1} \Rightarrow (1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$$

Ainsi, pour $r \neq 1$ on obtient la formule

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, $r = \frac{1}{2}$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0,$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Conclusion :

$$100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 100 \left(-1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}_{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2} \right) = 100 \quad \checkmark$$

Donc la flèche parcourt bien 100m, malgré le raisonnement étrange de Zénon !

La somme infinie $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$ s'appelle "série géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$ "; on dit qu'elle converge ou que sa somme est finie.

Manipulation des quantités infiniment petites / grandes

Dans le problème ci-dessus nous avons additionné un nombre infini de termes ($n \rightarrow \infty$) qui deviennent infiniment petits ($\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$), ce qui donne une somme finie.

⚠ Ce n'est pas toujours le cas :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty$$

Il faut donc être très prudent en manipulant des quantités infiniment petites / grandes si l'on ne veut pas obtenir des résultats faux!

Nous avons utilisé ici de façon cruciale la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Ce résultat reste vrai pour toute raison $0 < r < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad \forall \quad 0 < r < 1.$$

Nous donnerons un sens rigoureux à la notion de limite (c'est le cœur de l'analyse!) qui nous permettra de prouver ce résultat.

Méthodes de preuve

calculs et raisonnements

1) Preuve directe: $A \Rightarrow B$

Exemple 1: n impair $\Rightarrow n^2$ impair

Preuve: $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ #

2) Preuve par contrapositive: On utilise le fait que

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$$

(Ex. impératif: "S'il pleut, François ne sort pas.")

"Si François sort, c'est qu'il ne pleut pas.")

Exemple 2: n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

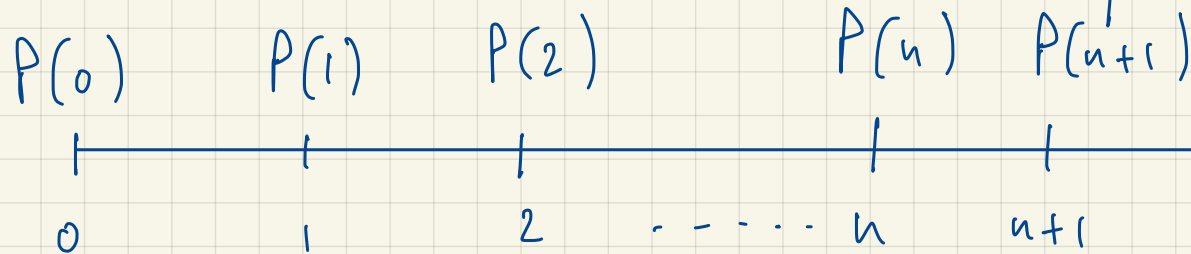
Preuve: L'énoncé est équivalent à n impair $\Rightarrow n^2$ impair,
qui a été démontré à l'exemple 1. #

Remarque: Un raisonnement analogue à celui de l'exemple 1
montre que n pair $\Rightarrow n^2$ pair
Cet énoncé est la réciproque de l'exemple 2.

Conclusion: n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair

(n est pair "si et seulement si" n^2 est pair)
ssi

3) Preuve par récurrence: propriété $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$



Idée de la méthode : pour montrer $P(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

il suffit de montrer :

- $P(0)$ vraie "initialisation"
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ "le pas de récurrence"

En effet, on peut alors conclure :

$P(0)$ vraie $\Rightarrow P(1)$ vraie $\Rightarrow P(2)$ vraie $\Rightarrow \dots \Rightarrow P(n)$ vraie

quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve : • $n = 0$: $\sum_{k=0}^0 k = 0$; $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ ✓

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: supposons $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, i.e.
c'est-à-dire $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ "hypothèse de récurrence"
 $P(n)$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) \stackrel{\text{hyp. réc.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

i.e. $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ $P(n+1)$ ✓

On conclut donc que $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

4) Preuve par l'absurde: (proof by contradiction)

Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A et non B et on cherche à aboutir à une contradiction logique.

Exemple 4: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Preuve: Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, i.e.

$$\exists p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0, \text{ pgcd}(p, q) = 1 \text{ r.-q.}$$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}. \quad \text{Alors} \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2,$$

donc p^2 est pair. Ainsi p est pair, $p = 2k$.

Alors $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$, q^2 est pair et

donc q est pair. Mais ceci contredit $\text{pgcd}(p, q) = 1$. $\nexists$ #