

Analyse avancée I (PH)

François Genoud
Automne 2024

Préambule

Ces notes sont basées sur le cours du Prof. Tudor Ratiu, que j'ai eu la chance de suivre à l'EPFL durant l'année académique 2000/2001. En tant qu'assistant-étudiant du Prof. Ratiu, j'en ai rédigé le polycopié du 1er semestre (Analyse I) en 2003. La présente version a été quelque peu remaniée, notamment certains sujets concernant les ensembles finis et infinis sont maintenant traités dans le cours d'algèbre linéaire et ne seront pas abordés ici. J'espère avoir été aussi clair que possible dans l'exposé, afin que vous puissiez vous familiariser sans trop de peine avec les nombreux et très riches sujets qui font l'objet de ce cours. Je conçois néanmoins qu'une importante quantité de matière est traitée en un temps assez court et que l'assimilation demande un effort de travail conséquent, notamment dans les exercices. J'ai parfois été volontairement assez succinct dans les démonstrations, pour vous incitez à vous creuser un peu la tête et, si nécessaire, à écrire quelques lignes pour clarifier par vous-mêmes les détails techniques. En effet, comme on entend souvent dire : "Les mathématiques ne s'apprennent pas en lisant, mais en écrivant."

Je tiens à remercier mon collègue-étudiant d'alors, le Prof. Sven Bachmann, pour sa relecture attentive et ses précieux conseils lors de la rédaction du manuscrit original en 2003. Notre solide amitié s'est forgée sur les bancs de l'EPFL, où nous découvrons ensemble avec émerveillement les liens profonds entre les mathématiques et la physique. L'activité de recherche en physique théorique/mathématique repose de manière fondamentale sur les notions et les savoir-faire acquis dans les cours d'analyse de 1ère année. Je suis infiniment reconnaissant au Prof. Ratiu pour son enthousiasme contagieux et sa vision très large de l'analyse. Ses cours ont été, non seulement, parmi les plus passionnants de ma carrière d'étudiant mais, sans doute, les plus utiles dans mon activité quotidienne de mathématicien.

François Genoud
Lausanne, automne 2018

Table des matières

1	Nombres, ensembles, fonctions	1
1.1	L'ensemble des nombres réels	1
1.2	Propriétés des sous-ensembles de $\mathbb{R}$	4
1.3	Fonctions réelles d'une variable réelle	8
2	Suites numériques	15
2.1	Limite d'une suite	15
2.2	Opérations sur les suites	22
2.3	Limite infinie	25
2.4	Sous-suites	27
2.5	Suites de Cauchy	29
2.6	Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	32
3	Séries numériques	35
3.1	Définitions et exemples	35
3.2	Critères de convergence	40
3.3	Permutation de l'ordre des termes	48
4	Fonctions	51
4.1	Rappels	51
4.2	Limites d'une fonction	52
4.3	Fonctions continues	58
4.4	Fonctions continues sur un intervalle fermé	61
4.5	Continuité uniforme	63
5	Calcul différentiel	69
5.1	Définitions et règles de calcul	69
5.2	Théorèmes des accroissements finis	76
5.3	Fonctions convexes	80
5.4	La règle de Bernoulli-l'Hospital	82
5.5	Développements limités	85
5.6	Comportement local d'une fonction	91
6	Suites de fonctions	95
6.1	Convergence, continuité	95
6.2	Suites monotones	99
6.3	Fonctions dérivables	102

6.4	Théorème de Stone-Weierstrass	104
7	Séries entières, fonctions analytiques	105
7.1	Limites inférieures et supérieures d'une suite	105
7.2	Séries entières	106
7.3	Fonctions élémentaires	112
8	Intégration	129
8.1	Intégrale définie	129
8.2	Intégrale indéfinie, théorème fondamental	139
8.3	Techniques d'intégration	142
8.4	Longueur d'arc	149
8.5	Théorèmes de convergence	150
8.6	Intégrales généralisées	151
	Ouvrages de référence	163

Chapitre 1

Nombres, ensembles, fonctions

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions de base concernant l'ensemble des nombres réels et ses sous-ensembles, les notations usuelles du langage ensembliste, ainsi que les propriétés élémentaires des fonctions réelles d'une variable réelle.

Nous n'avons pas ici l'ambition de présenter une construction rigoureuse des nombres réels, mais uniquement quelques rappels fondamentaux et nécessaires à la suite du cours.

1.1 L'ensemble des nombres réels

1.1.1 Nombres entiers et rationnels

On définit l'ensemble des *entiers positifs*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

que l'on muni des opérations arithmétiques usuelles :

- ★ addition : $(n, m) \mapsto n + m$;
- ★ multiplication : $(n, m) \mapsto n \cdot m \equiv nm$,

et de la relation d'ordre $n \leq m$, pour $n, m \in \mathbb{N}$. Les propriétés principales de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ sont les suivantes :

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq n$; (*réflexivité*)
- (ii) si $n, m \in \mathbb{N}$ satisfont $n \leq m$ et $m \leq n$, alors $n = m$; (*antisymétrie*)
- (iii) si $n, m, p \in \mathbb{N}$ satisfont $n \leq m$ et $m \leq p$, alors $n \leq p$; (*transitivité*)
- (iv) pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a soit $n \leq m$ soit $m \leq n$. (*ordre total*)

On dit que $m \geq n$ si et seulement si $n \leq m$.

On note $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des *entiers strictement positifs* (nombres naturels) muni des mêmes opérations et relation d'ordre.¹

1. Certains auteurs, notamment dans la littérature mathématique anglophone, notent $\mathbb{N}$ les entiers strictement positifs. D'ailleurs, en anglais, “positive” signifie généralement “strictement positif”.

On considère dans $\mathbb{N}$ les équations de la forme

$$m + x = n, \quad mx = n,$$

pour $n, m \in \mathbb{N}$ donnés. On remarque, par exemple, que les équations

$$2 + x = 7, \quad 3x = 9$$

admettent des solutions dans $\mathbb{N}$, alors que les équations

$$7 + x = 2, \quad 9x = 3$$

n'en admettent pas.

On définit l'ensemble des *entiers relatifs*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\},$$

muni des mêmes opérations arithmétiques et relation d'ordre que $\mathbb{N}$. On remarque alors que les équations du type $m + x = n$, pour $n, m \in \mathbb{Z}$, admettent toujours une solution unique dans $\mathbb{Z}$. Cependant, les équations de la forme $mx = n$ n'admettent pas toujours de solution dans $\mathbb{Z}$.

On définit l'ensemble des *nombre rationnels* $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des fractions de la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. Cette définition sous-entend la relation d'équivalence $np/nq \sim p/q$, $n \in \mathbb{Z}^*$, qui est compatible avec les opérations algébriques. Un point crucial est que l'on peut choisir un représentant de la classe d'équivalence $[p/q]$ (cf. cours d'algèbre linéaire pour les notions de relation/classe d'équivalence) tel que le plus grand diviseur commun de p et q soit égal à 1. On peut munir $\mathbb{Q}$ des mêmes opérations arithmétiques et relation d'ordre précédemment définies.

Les équations du type

$$a + x = b, \quad a, b \in \mathbb{Q}, \quad ax = b, \quad a, b \in \mathbb{Q}, \quad a \neq 0,$$

ont toujours une unique solution dans $\mathbb{Q}$.

En résumé, $\mathbb{Q}$ est muni des propriétés suivantes :

- ★ opérations arithmétiques $+, \cdot$ avec les règles de calculs : associativité, distributivité, commutativité, éléments neutres $(0, 1)$, inverses $(-x, x^{-1})$;
- ★ relation d'ordre $\leq$ avec les propriétés (i)–(iv) ci-dessus et les règles de compatibilité suivantes, pour $a, b \in \mathbb{Q}$:

$$(v) \quad a \leq b \implies a + x \leq b + x, \quad \forall x \in \mathbb{Q},$$

$$(vi) \quad a \leq b \implies ax \leq bx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \quad x \geq 0.$$

On dit que $\mathbb{Q}$ est un *corps (commutatif) ordonné* (cf. cours d'algèbre linéaire).

Noter que, si la définition de $\leq$ sur $\mathbb{Z}$ est évidente (par énumération), elle ne l'est pas a priori sur $\mathbb{Q}$. En utilisant les règles de calcul habituelles (mise au même dénominateur), on montre que (au sens des classes d'équivalence)

$$\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} = \frac{pq' - p'q}{qq'}.$$

On dit alors que $p/q \leq p'/q'$ si et seulement si $p/q - p'/q' = (pq' - p'q)/qq' \leq 0$, soit $qq' > 0$ et $pq' - p'q \leq 0$ ou $qq' < 0$ et $pq' - p'q \geq 0$.

1.1.2 Définition

On rappelle que la *valeur absolue* de $x \in \mathbb{Q}$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et la *fonction signe* par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La fonction signe n'est pas définie en $x = 0$.

1.1.3 Remarque

On a pour la valeur absolue les propriétés importantes suivantes :

- (i) $x \leq |x|$;
- (ii) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- (iii) $|xy| = |x||y|$;
- (iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*inégalité triangulaire*) ;
- (v) $|x - y| \geq ||x| - |y||$;
- (vi) $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ pour tout $x \neq 0$.

1.1.4 “Définition” de $\mathbb{R}$

Nous nous contenterons dans ce cours de la “définition” intuitive suivante : l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ peut être représenté par une droite sur laquelle chaque point correspond à un nombre de façon biunivoque ($\mathbb{R}$ est en bijection avec la droite). On parle alors de *droite réelle*.

La droite réelle a les propriétés élémentaires suivantes :

- ★ opérations arithmétiques $+, \cdot$ avec les mêmes règles de calcul que sur $\mathbb{Q}$;
- ★ relation d'ordre $\leq$ avec les mêmes propriétés et les mêmes règles de compatibilité que sur $\mathbb{Q}$.

Cette structure algébrique fait de $\mathbb{R}$ un *corps (commutatif) ordonné*. L'existence de $\mathbb{R}$ est garantie par un important théorème qui affirme que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps, et ayant la **propriété de la borne supérieure**. Cette propriété sera donnée comme axiome à la fin de la section suivante. Une démonstration de ce théorème peut être trouvée, par exemple, dans l'excellent ouvrage de W. Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, ou dans R. Godement, *Analyse mathématique I* (cf. bibliographie à la fin du polycopié). Elle procède d'une construction algébrique rigoureuse des nombres réels à partir des rationnels, qui sort malheureusement du cadre de ce cours. Dans une telle construction (il en existe plusieurs variantes aboutissant au

même résultat), les opérations arithmétiques et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ sont héritées naturellement de leur définition sur $\mathbb{Q}$.

La relation d'ordre donne à la droite une orientation, de $-\infty$ à $+\infty$ (la notion d'infini sera introduite de manière plus précise à la section 2.3). On a de plus une notion de distance entre deux points x, y de la droite, donnée par $d(x, y) = |x - y|$, où la définition de la valeur absolue est naturellement étendue de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. (On discutera plus en détail la notion de distance à la remarque 2.5.4.)

Il faut remarquer que $\mathbb{R}$ est beaucoup plus riche que $\mathbb{Q}$. En effet, $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas (cf. cours d'algèbre linéaire). Tous les réels qui ne sont pas rationnels sont dits *irrationnels* et sont donc “beaucoup plus nombreux” que les rationnels. Si l'on cherche par exemple à déterminer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, on est amené à une équation algébrique dont la solution n'est pas rationnelle.

1.1.5 Exemple

L'équation $x^2 = 2$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions, notées $\pm\sqrt{2}$, mais elle n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$. En effet, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration Supposons par l'absurde qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux (i.e. dont le pgcd vaut 1) tel que $p/q = \sqrt{2}$. On a alors $p^2 = 2q^2$, donc p est pair, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Mais alors $2q^2 = p^2 = 4k^2$, $q^2 = 2k^2$, donc q est aussi pair, ce qui contredit l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux. ♦

Le fait que $x^2 = 2$ est soluble dans $\mathbb{R}$ (i.e. l'existence de $\sqrt{2}$) sera abordé aux exercices.

1.2 Propriétés des sous-ensembles de $\mathbb{R}$

1.2.1 Notation

On rappelle maintenant les notions de base de la théorie des ensembles qui nous seront utiles dans tout le cours (voir par exemple Godement pour plus d'informations sur la théorie des ensembles et la logique mathématique).

- (i) $E \subset \mathbb{R}$ signifie que E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, i.e. un ensemble de nombres réels. Etant donné $E \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $x \in E$ ou $x \notin E$. Il est souvent utile de caractériser un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ par une propriété donnée, en écrivant

$$E = \{x \in \mathbb{R} ; \text{propriété caractéristique des éléments de } E\}.$$

Par exemple,

$$\mathbb{Q} = \{p/q ; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} \subset \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ la collection de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

- (ii) On admet comme axiome l'existence d'un sous-ensemble particulier de $\mathbb{R}$ appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$, défini par la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \notin \emptyset.$$

- (iii) Soit $E, F \subset \mathbb{R}$. On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si

$$x \in E \implies x \in F.$$

- (iv) Soit $E, F \subset \mathbb{R}$. On définit l'*intersection* de E et F par

$$E \cap F = \{x \in \mathbb{R}; x \in E \text{ et } x \in F\}$$

et la *réunion* de E et F par

$$E \cup F = \{x \in \mathbb{R}; x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Plus généralement, si $\Lambda \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on définit

$$\bigcap_{E \in \Lambda} E = \{x \in \mathbb{R}; \forall E \in \Lambda, x \in E\}$$

et

$$\bigcup_{E \in \Lambda} E = \{x \in \mathbb{R}; \exists E \in \Lambda, x \in E\}.$$

- (v) Soit $E \subset \mathbb{R}$. On définit le *complémentaire* de E dans $\mathbb{R}$ par

$$E^c = \mathbb{R} \setminus E = \{x \in \mathbb{R}; x \notin E\}.$$

On a $E \cup E^c = \mathbb{R}$ et $E \cap E^c = \emptyset$. Certains auteurs écrivent CE au lieu de E^c .

1.2.2 Exemples

- (i) On a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

- (ii) Les sous-ensembles suivants sont souvent utiles :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}, \\ \mathbb{R}_- &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}, \\ \mathbb{R}^* &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \mathbb{R}_+^* &= \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}, \\ \mathbb{R}_-^* &= \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}. \end{aligned}$$

On définit de façon similaire $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Q}^*$, etc.

- (iii) On a clairement $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \emptyset$.
 (iv) Pour tout $E \subset \mathbb{R}$, on vérifie que $E \subset E$, $E \cup \emptyset = E$, $E \cap \emptyset = \emptyset$.
 (v) On peut également vérifier que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}; \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset; \quad \forall E \subset \mathbb{R}, \bigcup_{x \in E} \{x\} = E.$$

1.2.3 Définition

On définit, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ appelés *intervalles* :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} && (\text{intervalle fermé}) \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} && (\text{intervalle ouvert}) \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} && (\text{intervalle semi-ouvert}) \end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $(a, a) = \emptyset$ et $[a, a] = \{a\}$ (intervalles dégénérés).

On définit également les *intervalles généralisés* :

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\} \end{aligned}$$

L'ensemble des réels peut donc s'écrire $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Attention ! $\pm\infty$ ne sont pas des nombres ; on ne peut pas écrire $[a, +\infty]$ ou $[-\infty, b]$.

1.2.4 Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

On dit que E est *borné supérieurement* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq b$ pour tout $x \in E$. On dit alors que b est un *majorant* de E .

On dit que E est *borné inférieurement* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq x$ pour tout $x \in E$. On dit alors que a est un *minorant* de E .

Finalement, E est *borné* s'il admet un minorant et un majorant.

1.2.5 Exemples

- (i) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont bornés inférieurement mais pas supérieurement.
- (ii) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ne sont bornés ni inférieurement, ni supérieurement.
- (iii) $[a, b]$, pour $a, b \in \mathbb{R}$, est borné.
- (iv) $(-\infty, a)$, pour $a \in \mathbb{R}$, est borné supérieurement.

1.2.6 Définition

- (i) Si $E \subset \mathbb{R}$ est borné supérieurement, on définit le *supremum* de E par

$$\sup E = \text{le plus petit majorant de } E.$$

Plus précisément, $\sup E$ est l'unique majorant de E satisfaisant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\sup E - \varepsilon \leq x \leq \sup E$.

(ii) Si $E \subset \mathbb{R}$ est borné inférieurement, on définit l'*infimum* de E par

$$\inf E = \text{le plus grand minorant de } E.$$

Plus précisément, $\inf E$ est l'unique minorant de E satisfaisant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\inf E \leq x \leq \inf E + \varepsilon$.

On dit que $\sup E$ est la *borne supérieure* de E et $\inf E$ sa *borne inférieure*.

L'unicité de $\sup E$ et $\inf E$ sera prouvée en exercice.

1.2.7 Définition

Si $E \subset \mathbb{R}$ n'est pas borné supérieurement, on pose $\sup E = +\infty$.

Si $E \subset \mathbb{R}$ n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf E = -\infty$.

1.2.8 Exemples

(i) $\inf \mathbb{N} = \inf \mathbb{R}_+ = \inf \mathbb{R}_+^* = 0$.

(ii) $\inf \mathbb{N}^* = 1$.

(iii) $\inf(a, b] = \inf[a, b] = a, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

1.2.9 Remarques

(i) On a les deux possibilités :

$$\inf E \in E \text{ (par exemple } 0 \in \mathbb{R}_+); \quad \inf E \notin E \text{ (par exemple } 0 \notin \mathbb{R}_+^*).$$

De même pour le supremum.

(ii) Il découle des définitions ci-dessus que $\emptyset$ est borné et que tout nombre réel est à la fois majorant et minorant de $\emptyset$. Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$.

1.2.10 Exemple

Soit $E = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\}$ et $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\} = E \cap \mathbb{Q}$. Nous allons voir aux exercices que $\inf E = -\sqrt{2}$ et $\sup E = \sqrt{2}$; en particulier, E est borné. En revanche, $\inf A = -\sqrt{2} \notin A$ et $\sup A = \sqrt{2} \notin A$.

Nous donnons maintenant **comme axiome** la propriété de la borne supérieure. Cette propriété se démontre dans le cadre de la construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ (cf. Rudin). L'exemple précédent montre que $\mathbb{Q}$ n'a pas cette propriété.

1.2.11 Axiome (*propriété de la borne supérieure*)

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ et borné supérieurement (resp. inférieurement). Il existe alors $\sup E$ (resp. $\inf E$) $\in \mathbb{R}$.

1.2.12 Proposition (*propriété d'Archimède*)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Alors il existe un entier $n > 0$ tel que

$$nx > y.$$

Démonstration Soit A l'ensemble de tous les nombres de la forme nx , $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que y est un majorant de A . Alors A est borné supérieurement. Par la propriété de la borne supérieure, il existe $\alpha = \sup A$.

Puisque $x > 0 \Rightarrow \alpha - x < \alpha$, $\alpha - x$ n'est pas un majorant de A . Donc il existe un entier $m > 0$ tel que $\alpha - x < mx$. Ainsi, $(m+1)x > \alpha$, ce qui contredit le fait que α est un majorant de A . ♦

1.2.13 Remarque

Nous avons déjà utilisé implicitement la propriété d'Archimède dans les exemples ci-dessus, sauriez-vous dire où ?

1.3 Fonctions réelles d'une variable réelle

Nous rappelons dans cette section les notions élémentaires concernant les fonctions réelles d'une variable réelle qui seront nécessaires par la suite pour une étude plus approfondie des propriétés de ces fonctions (continuité, dérivabilité, etc.).

1.3.1 Définition

Une *fonction réelle d'une variable réelle* est définie par les trois objets suivants :

- (i) le *domaine de définition* $D(f)$ de la fonction qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (la variable est réelle),
- (ii) l'*ensemble d'arrivée* A qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (la fonction est réelle),
- (iii) une règle f qui associe à chaque élément $x \in D(f)$ un **unique** élément y de l'ensemble d'arrivée.

On écrit ça sous la forme compact

$$f : D(f) \longrightarrow A, \quad x \mapsto y = f(x),$$

et on dit que x est la *variable indépendante*, la variable y dépendant de x selon l'expression $y = f(x)$.

On désigne souvent par abus de langage la fonction par f mais il faut se rappeler qu'on doit toujours préciser le domaine de définition ! En d'autres termes, une fonction est toujours définie par un triplet $(D(f), A, f)$. Il est néanmoins très fréquent que l'on omette de spécifier A , auquel cas il est entendu que $A = \mathbb{R}$. On définit donc le plus souvent une fonction par les données $D(f)$ et $f(x)$.

1.3.2 Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace euclidien à n dimensions se note

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Etant donnée une fonction $(D(f), A, f)$, on appelle *graphe* de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D(f), y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

L'image de f est définie par

$$\text{Im}(f) = \{f(x); x \in D(f)\} \subset A.$$

Pour $E \subset \text{Im}(f)$, on définit l'image de E par f ,

$$f(E) = \{f(x); x \in E\}.$$

On appelle *représentation graphique* de f la courbe du plan $\mathbb{R}^2$ représentant $G(f)$.

On donne alors une interprétation géométrique de l'unicité dans la définition 1.3.1 (iii) : l'intersection de $G(f)$ avec une droite verticale (i.e. parallèle à l'axe Oy) admet **au plus** un point.

1.3.3 Exemple

Considérons l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$ et les fonctions

$$f_1 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

$$f_2 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

On voit que le cercle est la réunion des graphes de f_1 et f_2 .

1.3.4 Définition

On dit qu'une fonction f est

- (i) *injective* si $x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$,
- (ii) *surjective* si $\text{Im}(f) = A$,
- (iii) *bijective* si f est injective et surjective.

On peut reformuler comme suit : f est

- (i) *injective* si $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ (très utile en pratique),
- (ii) *surjective* si $\forall y \in A, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$,
- (iii) *bijective* si $\forall y \in A, \exists x \in D(f), f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$.

1.3.5 Exemples

- (i) Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, la *fonction identité* $\text{Id}_A : A \longrightarrow A$ définie par $\text{Id}_A(x) = x$ est bijective.
- (ii) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, est bijective.
- (iii) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, n'est ni injective ni surjective.
- (iv) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, est injective.
- (v) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, est surjective.

1.3.6 Définition

Soit $(D(f), A, f)$ une fonction.

- (i) On dit que $(D(f_1), A_1, f_1)$ est une *restriction* de f si

$$D(f_1) \subset D(f), \quad A_1 \subset A, \quad f_1(x) = f(x), \quad \forall x \in D(f_1).$$

- (ii) On dit que $(D(f_2), A_2, f_2)$ est une *extension* de f si

$$D(f) \subset D(f_2), \quad A \subset A_2, \quad f(x) = f_2(x), \quad \forall x \in D(f).$$

On voit que : si f_1 est une restriction de f , alors f est une extension de f_1 ; si f_2 est une extension de f , alors f est une restriction de f_2 .

Si f_1 est une restriction de f , on note $f_1 = f|_{D(f_1)}$.

Attention ! Si $A_1 = A = A_2 = \mathbb{R}$, alors $f_1 = f|_{D(f_1)}$ est unique mais l'extension f_2 n'est pas unique.

1.3.7 Opérations sur les fonctions

Considérons les fonctions $(D(f), \mathbb{R}, f)$ et $(D(g), \mathbb{R}, g)$. On définit les opérations suivantes :

- ★ la combinaison linéaire :

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \forall x \in D(f) \cap D(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

- ★ le produit :

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in D(f) \cap D(g),$$

- ★ le quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in D(f) \cap D(g) \text{ tel que } g(x) \neq 0,$$

- ★ la composition :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in D(f \circ g) = \{x \in D(g) ; g(x) \in D(f)\}.$$

1.3.8 Exemples

- (i) Par convention, on pose $x^0 = 1$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et on considère les *fonctions puissance* :

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, \dots, f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}.$$

On peut alors former une combinaison linéaire :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i f_i(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq n), a_n \neq 0.$$

C'est un polynôme en x de degré n avec $D(P) = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ et on a que $\text{Im}(P) \subset \mathbb{R}$, mais $\text{Im}(P) \neq \mathbb{R}$ en général. (Par exemple $\text{Im}(x^2) = \mathbb{R}_+$.)

Soit $Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, b_i \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq m), b_m \neq 0$, un polynôme en x de degré m . Alors la combinaison linéaire $\alpha P + \beta Q, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, est un polynôme tel que $\deg(\alpha P + \beta Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

Pour le produit PQ , on a $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Pour $x \in D(P/Q) = \{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\}$, on définit la *fonction rationnelle* P/Q donnée explicitement par

$$\left(\frac{P}{Q}\right)(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m}.$$

- (ii) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *partie entière* par

$$E(x) \equiv [x] = k, \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \text{ est l'unique entier relatif tel que } k \leq x < k + 1.$$

Clairement $D(E) = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ et $\text{Im}(E) = \mathbb{Z}$.

On définit également $R(x) = x - E(x)$, la *partie fractionnaire* de x .

C'est un exercice intéressant de représenter graphiquement les fonctions E et R .

- (iii) Considérons les fonctions

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^6, \quad f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f(y) = \sqrt{y}.$$

On a alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^6) = \sqrt{-x^6}, x \in D(f \circ g) = \{0\}$$

et

$$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(\sqrt{y}) = -y^3, y \in D(g \circ f) = \mathbb{R}_+ \neq D(f \circ g).$$

On constate ainsi qu'en général $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

On peut trouver une extension de $g \circ f$ à $\mathbb{R}$, par exemple

$$h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(y) = -y^3.$$

Une autre extension est donnée par

$$h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} h_2(y) = 1 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ h_2(y) = -y^3 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

L'extension h_1 est continue sur $\mathbb{R}$, alors que h_2 est discontinue en $x = 0$. (On peut tracer la représentation graphique de h_1 “sans lever le stylo”, ce n'est pas le cas pour h_2 . Une définition précise de la continuité sera donnée au chapitre 4.)

1.3.9 Fonction inverse

Soit $(D(f), A, f)$ une fonction. Pour $y \in \mathbb{R}$, considérons l'équation

$$f(x) = y.$$

- (i) On se pose la question de savoir si cette équation possède des solutions, autrement dit, on cherche à la résoudre par rapport à x . Si f est surjective, on aura au moins une solution.
- (ii) La deuxième question qui se pose naturellement est celle de l'unicité d'une éventuelle solution. Si f est injective alors la solution, si elle existe, est unique.
- (iii) On se demande maintenant s'il existe une fonction $(D(g), B, g)$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_{D(f)} \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_{D(g)}.$$

(La fonction Id_A , $A \subset \mathbb{R}$, a été introduite à l'exemple 1.3.5 (i).)

Pour que les expressions ci-dessus aient un sens, on doit avoir

$$\text{Im}(f) = D(g) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g) = D(f).$$

Si une telle fonction g existe, notre équation possède une et une seule solution $x = g(y)$ pour chaque $y \in \text{Im}(f)$. C'est le cas si et seulement si f est bijective et on appelle alors g la *fonction inverse* (ou *fonction réciproque*) de f , notée f^{-1} . On dit alors que f est *inversible* et on a

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\text{Im}(f)} \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_{D(f)}.$$

1.3.10 Exemples

- (i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ est bijective avec $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = y$.
- (ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ est bijective avec $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.
- (iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ n'est pas injective, donc pas inversible.
- (iv) $f : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ n'est pas surjective, donc pas inversible.
- (v) En revanche, $f : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ est inversible avec $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_-$, $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

1.3.11 Définition

On dit qu'une fonction f est :

★ *constante* si $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f), f(x) = c$ (on note $f \equiv c$) ;

★ *croissante* si

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

★ *strictement croissante* si

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

★ *décroissante* si

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$$

★ *strictement décroissante* si

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

★ *monotone* si elle est croissante ou décroissante ;

★ *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante ;

★ *bornée inférieurement* si $\text{Im}(f)$ est borné inférieurement ;

★ *bornée supérieurement* si $\text{Im}(f)$ est borné supérieurement ;

★ *bornée* si elle est bornée inférieurement et bornée supérieurement ;

★ *paire* si $D(f)$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = f(x), \forall x \in D(f)$;

★ *impaire* si $D(f)$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = -f(x), \forall x \in D(f)$;

★ *périodique* si $D(f) = \mathbb{R}$ et $\exists T \in \mathbb{R}$ tel que $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

1.3.12 Exemples

- (i) La fonction partie entière est croissante mais pas strictement, ni bornée inférieurement ni bornée supérieurement, non périodique.
- (ii) La fonction partie fractionnaire est bornée et périodique.
- (iii) $f(x) = x^3$ est impaire, strictement croissante, ni bornée inférieurement ni bornée supérieurement, non périodique.
- (iv) $f(x) = x^2$ est paire, ni croissante ni décroissante, mais elle est monotone sur certains intervalles (par exemple $\mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{R}_+$). Par ailleurs, elle est bornée inférieurement (par 0) mais pas supérieurement, et elle n'est pas périodique.
- (v) La fonction $f(x) = \sin(x)$ est bornée et périodique sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Suites numériques

Nous introduisons dans ce chapitre la notion fondamentale en analyse de suite numérique. Nous définissons précisément et illustrons par divers exemples les concepts de convergence, de limite infinie, etc. Les théorèmes et résultats importants relatifs à la convergence et aux opérations algébriques sur les suites sont également énoncés et rigoureusement démontrés. Nous présentons la notion de suite de Cauchy, ainsi que celle de suite partielle, et nous démontrons le théorème de Bolzano-Weierstrass qui sera un outil puissant pour la suite du cours.

2.1 Limite d'une suite

2.1.1 Définition

On appelle *suite numérique* (ou simplement *suite*) une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, et on note

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) =: x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On désignera le plus souvent la suite ainsi définie par la collection dénombrable ordonnée de nombres réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \subset \mathbb{R}$. On appelle x_n le *n-ième terme*, ou *terme général* de la suite. On peut ainsi interpréter $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme un point dans l'espace vectoriel de dimension infinie $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$.

Une suite peut être définie de différentes manières, par exemple par une formule explicite du type

$$x_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

ou encore par une *relation de récurrence* de la forme

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné.}$$

2.1.2 Exemples

- (i) $x_n = a \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définit une suite constante ;
- (ii) $x_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $x_n = n^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}$;

- (iv) $x_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0! := 1$;
- (v) $x_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$;
- (vi) $x_n = an + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définit une *progression arithmétique* (constante si $a = 0$) ;
- (vii) $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, $r \in \mathbb{R}^*$ fixé, et $x_{n+1} = rx_n$, i.e. $x_n = x_0 r^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définit une *suite géométrique* de premier terme x_0 et de *raison* r ;
- (viii) $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+1} =$ le plus petit nombre premier supérieur à x_n .

2.1.3 Remarque

Si la fonction f définissant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante / décroissante, on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante / décroissante ; si f est bornée, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée, etc.

2.1.4 Définition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la *limite* de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N \implies |x_n - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \quad \text{ou} \quad x_n \longrightarrow l \quad (n \rightarrow \infty),$$

et on dit que la suite *converge* vers la limite l .

Cette définition quelque peu abstraite peut être expliquée de façon plus intuitive comme suit. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si on peut rendre la distance entre les “points” de la suite et la limite l arbitrairement petite ($\forall \varepsilon > 0$) à partir d’un certain *rang* ($n \geq N$), i.e. les termes de la suite s’approchent indéfiniment du nombre $l \in \mathbb{R}$. En d’autres termes, si on choisit un intervalle $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ de largeur 2ε arbitrairement petit autour de l , on a que tous les termes de la suite, sauf **un nombre fini** d’entre eux, se trouveront dans l’intervalle considéré.

2.1.5 Remarque

Dans la définition précédente, le nombre naturel N dépend de ε . On notera parfois explicitement cette dépendance par $N = N(\varepsilon)$.

Si une suite admet une limite, on dit qu’elle est *convergente*, sinon on dit qu’elle *diverge* ou qu’elle est *divergente*.

Attention ! La limite l est un nombre réel, i.e. $l \neq \pm\infty$.

2.1.6 Exemples

- (i) Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre facilement (par l’absurde) que cette suite est divergente en utilisant le fait que $|x_{n+1} - x_n| = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (ii) Soit $x_n = 1/n^2$, $n \geq 1$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie converge vers 0. En effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ainsi, il suffit de choisir un entier $N > 1/\sqrt{\varepsilon}$ dans la définition de la limite.

2.1.7 Proposition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- (i) Si $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ($n \rightarrow \infty$), alors la limite l est unique.
- (ii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.
- (iii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = y_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors les suites sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes.
- (iv) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq n_1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Démonstration

- (i) Supposons par l'absurde qu'il existe $l, l' \in \mathbb{R}$, $l \neq l'$, tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon), N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad |x_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N'(\varepsilon).$$

Alors pour tout $n \geq \max\{N(\varepsilon), N'(\varepsilon)\}$, on va avoir

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq |x_n - l| + |x_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. Donc $l' = l$.

- (ii) On suppose que $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ($n \rightarrow \infty$). Prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - l| < 1$ pour tout $n \geq N$. Donc

$$l - 1 < x_n < l + 1, \quad \forall n \geq N.$$

En posant

$$a = \min\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, l - 1\}$$

et

$$b = \max\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, l + 1\},$$

on a alors que $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

- (iii) Puisque les suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ coïncident à partir du rang n_0 , leur comportement lorsque $n \rightarrow \infty$ est identique.

La démonstration du point (iv) est laissée en exercice. ♦

2.1.8 Corollaire

Toute suite non-bornée est divergente.

Démonstration Enoncé contraposé de la proposition 2.1.7 (ii). ♦

2.1.9 Théorème (*Principe des deux gendarmes*)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Supposons que :

$$(a) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad x_n \leq y_n \leq z_n ;$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_0$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad x_n - l > -\varepsilon \quad \text{et} \quad z_n - l < \varepsilon.$$

Par les inégalités de l'hypothèse (a), on obtient

$$\forall n \geq N, \quad -\varepsilon < x_n - l \leq y_n - l \leq z_n - l < \varepsilon,$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$. ♦

2.1.10 Exemples

(i) Considérons la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ définie par $y_n = (1/n) \sin(n^2)$ pour tout $n \geq 1$.

On a

$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1 \quad \implies \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n^2)}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Ainsi, en posant $x_n = -1/n$ et $z_n = 1/n$, $n \geq 1$, et en remarquant que $x_n, z_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), on déduit que $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(ii) On considère maintenant la suite de terme général

$$y_n = \frac{\cos^2(n)}{n + \sin(n)}, \quad n \geq 2.$$

On a

$$n - 1 \leq n + \sin(n) \leq n + 1 \quad \implies \quad \frac{1}{n + 1} \leq \frac{1}{n + \sin(n)} \leq \frac{1}{n - 1}, \quad n \geq 2,$$

et donc, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n + \sin(n)} \leq \frac{1}{n - 1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

2.1.11 Théorème

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et bornée supérieurement (resp. bornée inférieurement), alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration Montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et bornée supérieurement $\implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, la démonstration de l'autre cas étant tout à fait analogue.

Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée supérieurement, il existe $b = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Maintenant, par définition du supremum, on a que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } b - \varepsilon \leq x_N \leq b.$$

Mais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et on a donc

$$b - \varepsilon \leq x_N \leq x_{N+1} \leq \dots \leq b,$$

et ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. ♦

2.1.12 Exemples

Pour les exemples ci-dessous, on rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

valable pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, où $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $\forall p \leq n$.

(i) Pour $a > 0$, posons $x_n = \sqrt[n]{a}$, $n \geq 1$. On distingue alors les trois cas suivants :

$$\star a = 1 : \quad x_n = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$\star a > 1$: $x_n = \sqrt[n]{a} > 1$ pour tout $n \geq 2$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par 1. D'autre part, pour $n \geq 2$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = a^{-\frac{1}{n(n+1)}} < 1,$$

ce qui montre que $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Montrons que sa limite est 1 :

Soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 1$, et posons $l = 1 + c$, $c \geq 0$.

Alors pour $n \geq 2$,

$$1 + c = l \leq \sqrt[n]{a} \implies 1 + nc \leq 1 + nc + \binom{n}{2} c^2 + \dots + c^n = (1 + c)^n = l^n \leq a,$$

par la formule du binôme de Newton. On a donc

$$1 + nc \leq a, \quad \forall n \geq 2,$$

ce qui est absurde si $c > 0$. Donc $c = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour $a \geq 1$.

★ $0 < a < 1$: Posons $b = 1/a > 1$, $x_n = 1/y_n$, où $y_n := \sqrt[n]{b}$. Par le point précédent, $(y_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et bornée inférieurement, avec $\inf\{y_n; n \in \mathbb{N}^*\} = 1$. Donc $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et bornée supérieurement, avec

$$\sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \inf\{y_n; n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

On a donc montré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \forall a > 0.$$

(ii) Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Par la formule du binôme de Newton on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots + n \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n!} \frac{n!}{n^n} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

car

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \leq 1, \quad \forall k \leq n.$$

D'autre part, pour tout $k \geq 2$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 = 2^{k-1}$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} &\implies x_n \leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{série géométrique}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3, \quad \forall n \geq 2, \end{aligned}$$

puisque la formule bien connue pour la série géométrique donne

$$1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \forall q \neq 1.$$

Ainsi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée supérieurement par 3.

Nous montrons maintenant que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} \\
&\quad \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n-1} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n!} \frac{n!}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \dots \\
&\quad \dots + \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} + \dots + \binom{n+1}{n} \frac{1}{(n+1)^n} \\
&\leq 1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \dots \\
&\quad \dots + \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} + \dots + \binom{n+1}{n} \frac{1}{(n+1)^n} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}_{\text{on ajoute ce terme "gratuitement"}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et bornée supérieurement, donc convergente.
On définit alors

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- (iii) Montrons que la suite de terme général $y_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$, converge vers 1.

On a clairement $y_n \geq 1$, pour tout $n \geq 1$. D'autre part, d'après l'exemple précédent, pour tout $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3 \implies (n+1)^n \leq n^{n+1} \\ \implies y_{n+1} &= \sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} = y_n. \end{aligned}$$

Ainsi $(y_n)_{n \geq 3}$ est décroissante¹ et minorée par 1, donc elle converge vers une limite $l \geq 1$.

Posons $l = 1 + c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$, $c \geq 0$.

On a alors $l = 1 + c \leq \sqrt[n]{n} \implies l^n = (1 + c)^n \leq n$.

Mais $(1 + c)^n = 1 + nc + \binom{n}{2}c^2 + \dots + c^n$ et donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{n(n-1)}{2}c^2 \leq (1 + c)^n \leq n \implies \frac{(n-1)}{2}c^2 \leq 1,$$

ce qui est absurde si $c \neq 0$. Donc $c = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2.2 Opérations sur les suites

Le but de cette section est d'étudier la convergence de nouvelles suites définies au moyen de deux suites données et des opérations algébriques élémentaires.

Pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on définit :

★ la combinaison linéaire :

$$(\alpha x_n + \beta y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ fixés ;}$$

★ le produit :

$$(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

★ le quotient :

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq n_0} \quad \text{si } y_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}.$$

1. Notez que $y_1 = 1$ et $y_2 = \sqrt{2} > 1$, donc la suite (y_n) n'est décroissante qu'à partir de $n = 3$.

2.2.1 Proposition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. S'il existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y,$$

alors :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = xy;$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = x / y \quad \text{si} \quad y \neq 0.$

Démonstration Par définition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}$$

$$|x_n - x| < \varepsilon_1, \quad \forall n \geq n_1, \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \iff \forall \varepsilon_2 > 0, \exists n_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}$$

$$|y_n - y| < \varepsilon_2, \quad \forall n \geq n_2.$$

- (i) Nous supposons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, les autres cas se traitant de façon analogue.
Soit $\varepsilon > 0$ et prenons $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \min\{\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\}$.

Posant $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}$ on a, pour tout $n \geq n(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} |\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)| &\leq |\alpha||x_n - x| + |\beta||y_n - y| \\ &\leq |\alpha|\varepsilon_1 + |\beta|\varepsilon_2 < |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta|\frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

- (ii) Puisque

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x_n y + x_n y - xy = x_n(y_n - y) + (x_n - x)y,$$

on a que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| \\ &\leq c|y_n - y| + |x_n - x||y| \quad \text{pour un } c \geq 0, \end{aligned}$$

car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $c\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Alors pour $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}$, on a

$$|x_n y_n - xy| \leq c\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1 < \varepsilon, \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

(iii) On a

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \left| \frac{x_n y - y_n x}{y_n y} \right| = \left| \frac{x_n y - x y + x y - x y_n}{y_n y} \right| \\
 &\leq \frac{|x_n - x| |y|}{|y_n| |y|} + \frac{|x| |y_n - y|}{|y_n| |y|} \\
 &= \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{|x| |y_n - y|}{|y_n| |y|} \\
 &< \frac{1}{|y_n|} \varepsilon_1 + \frac{|x|}{|y_n| |y|} \varepsilon_2, \quad \forall n \geq \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}.
 \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant majorer le membre de droite de cette inégalité par une constante ne dépendant plus de n mais uniquement de ε_1 et ε_2 . Par définition de la limite on a, pour tout $n \geq n_2(\varepsilon_2)$,

$$|y_n - y| < \varepsilon_2 \iff y - \varepsilon_2 < y_n < y + \varepsilon_2.$$

Sans perte de généralité, supposons $y > 0$, le cas $y < 0$ se traitant de manière analogue. Choisissons ε_2 assez petit pour que $\delta := y - \varepsilon_2 > 0$. Alors $y_n > \delta > 0$, pour tout $n \geq n_2(\varepsilon_2)$. On dit que y_n est “borné loin de zéro”², et il en découle que $1/y_n$ est borné :

$$\frac{1}{y_n} < \frac{1}{\delta}, \quad \forall n \geq n_2(\varepsilon_2).$$

On obtient donc

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{\delta} \varepsilon_1 + \frac{|x|}{\delta y} \varepsilon_2, \quad \forall n \geq \max\{n_1(\varepsilon_1), n_2(\varepsilon_2)\}.$$

On peut maintenant conclure. Pour $\varepsilon > 0$ donné, choisissons $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ assez petits tels que

$$y - \varepsilon_2 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\delta} \varepsilon_1 + \frac{|x|}{\delta y} \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Posant $n(\varepsilon) = \max\{n(\varepsilon_1), n(\varepsilon_2)\}$, on a alors

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n(\varepsilon). \blacklozenge$$

2.2.2 Exemples

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{127n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{127} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1.$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^3 = 1.$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + n - 1}{7n^3 - 5n^2 + 12n - 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(3 + 2/n + 1/n^2 - 1/n^3)}{n^3(7 - 5/n + 12/n^2 - 9/n^3)} = 3/7.$

2. traduction française littérale de “bounded away from zero”; les auteurs francophones disent plutôt “minoré par une constante positive”

2.3 Extension du concept de limite : limite infinie

2.3.1 Définition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On dit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{ou} \quad x_n \longrightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

si

$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad x_n \geq M, \forall n \geq N.$$

On dit de même que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad \text{ou} \quad x_n \longrightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

si

$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad x_n \leq -M, \forall n \geq N.$$

Attention ! Comme nous allons le voir dans les exemples ci-dessous, les règles de calcul données par la proposition 2.2.1 ne sont plus valables, en général, pour les limites infinies. La proposition suivante donne néanmoins certaines règles de calculs.

2.3.2 Proposition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

- (i) S'il existe $\delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq \delta$ pour tout $n \geq n_0$, et si $y_n \longrightarrow \pm\infty$, alors $x_n y_n \longrightarrow \pm\infty$.
- (ii) Si $x_n \longrightarrow a \neq 0$ et $y_n \longrightarrow \pm\infty$, alors $x_n y_n \longrightarrow \pm \operatorname{sgn}(a)\infty$ et $x_n/y_n \longrightarrow 0$.
- (iii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $y_n \longrightarrow 0$, alors $x_n y_n \longrightarrow 0$.
- (iv) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $y_n \longrightarrow \pm\infty$, alors $x_n/y_n \longrightarrow 0$.
- (v) S'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq y_n$ pour tout $n \geq n_1$ et si $y_n \longrightarrow +\infty$, alors $x_n \longrightarrow +\infty$.
- (vi) Si $a > 1$ et $x_n \longrightarrow +\infty$, alors $a^{x_n} \longrightarrow +\infty$.

Démonstration Cette démonstration est laissée en exercice. ♦

2.3.3 Remarque

Le point (v) est parfois appelé “principe du chien méchant” !

2.3.4 Exemples

- (i) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = n!$ satisfait $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

En effet, étant donné $M > 0$, on a que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \geq n \geq M,$$

dès que $n \geq M$. Il suffit donc de prendre un entier $N(M) \geq M$.

- (ii) Posons

$$x_n = \frac{a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \dots + b_q n^q}, \quad a_p, b_q \neq 0, \quad n \geq 1.$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } q > p, \\ a_p/b_q & \text{si } q = p, \\ \pm\infty & \text{si } q < p, \text{ le signe étant celui de } a_p/b_q. \end{cases}$$

Ce résultat découle des Propositions 2.2.1 et 2.3.2 en écrivant

$$x_n = \frac{n^p a_0 n^{-p} + a_1 n^{1-p} + \dots + a_p}{n^q b_0 n^{-q} + b_1 n^{1-q} + \dots + b_q}$$

et en raisonnant sur le rapport des puissances n^p/n^q .

- (iii) Par les Propositions 2.2.1 et 2.3.2, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{2+1/n} - \sqrt{1+2/n} \right) = +\infty.$$

D'autre part, en utilisant l'identité $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - (n+2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = 0.$$

2.3.5 Remarque

Les exemples (ii) et (iii) ci-dessus montrent que pour des limites du type

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \text{ou} \quad \infty - \infty,$$

on ne peut rien conclure a priori sur l'existence ou la valeur de la limite en utilisant la proposition 2.3.2. On parle de *forme indéterminée* pour une telle limite. Il faut alors déterminer la limite au cas par cas par des calculs et raisonnements appropriés.

Nous avons déjà rencontré un autre type de forme indéterminée, du type ∞^0 , avec la suite de terme général $x_n = n^{1/n}$. Nous avons prouvé que $x_n \rightarrow 1$. En revanche, la suite de terme général $(n^n)^{1/n}$, qui est du même type, diverge.

2.4 Sous-suites

2.4.1 Définition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction **strictement croissante**. On dit alors que la suite définie par

$$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad n_k = \varphi(k), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

est une *sous-suite* (ou *suite partielle* ou *suite extraite*) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La fonction $k \mapsto n_k$ sélectionne quel terme de la suite initiale doit figurer au rang k de la suite extraite.

En notant $x_n = f(n)$, on peut se représenter les choses de la façon suivante :

$$x_{n_k} = f(n_k) = f(\varphi(k)), \quad \text{i.e.} \quad k \mapsto x_{n_k} = (f \circ \varphi)(k).$$

Il est crucial que la fonction φ soit strictement croissante. Sans cette hypothèse, comme nous le verrons par la suite, la description d'une suite par l'étude de ses sous-suites perdrait de sa force. (Par exemple, on pourrait extraire de toute suite réelle une sous-suite convergente, en posant $n_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.)

2.4.2 Exemple

Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on peut définir une sous-suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $y_k = x_{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (en posant $\varphi(k) = 2k$ dans la définition ci-dessus). On peut de même considérer la sous-suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $z_k = x_{2k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a alors $y_k = 1$ et $z_k = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On constate ainsi que les sous-suites $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes alors que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne l'est pas.

2.4.3 Proposition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $x_n \longrightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($n \rightarrow \infty$). Alors toute suite partielle $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait $x_{n_k} \longrightarrow l$ ($k \rightarrow \infty$).

Démonstration Trivial. ♦

Nous allons énoncer maintenant un théorème majeur, qui se révélera très important dans la suite du cours, notamment en ce qui concerne les propriétés des fonctions continues.

2.4.4 Théorème (*Bolzano-Weierstrass*)

Tout suite réelle bornée admet au moins une sous-suite convergente.

La démonstration que nous proposons nécessite le lemme suivant.

2.4.5 Lemme (*Principe des intervalles emboîtés*)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, respectivement croissante et décroissante. On suppose de plus que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons alors la famille d'intervalles fermés

$$I_n = [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

et notons $l_n = b_n - a_n$ leurs longueurs respectives. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 0$, il existe alors $c \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{c\}$.

Démonstration La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et bornée supérieurement (par exemple par b_0), il existe $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. De manière analogue, $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existe également. Puisque

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b - a,$$

on a donc $a = b$.

Montrons alors que $c := a = b$ satisfait $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{c\}$. Premièrement, $\{c\} \subset \bigcap_{n \geq 0} I_n$ car $a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow c \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_n$. On a alors que $a_n \leq x \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, le principe des deux gendarmes montre que $x = c$, d'où $\bigcap_{n \geq 0} I_n \subset \{c\}$. ♦

2.4.6 Remarques

- (i) Deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du lemme 2.4.5 sont dites *adjacentes*. Dans certains ouvrages, le lemme 2.4.5 s'appelle *théorème des suites adjacentes*.
- (ii) Remarquons que

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+1} \subset I_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, $\bigcap_{n \geq 0} I_n$ représente “la limite de I_n lorsque $n \rightarrow \infty$ ”. C’est la bonne manière de formaliser cette idée.

2.4.7 Remarque

Le principe n’est pas vrai pour les intervalles ouverts. Considérons par exemple la famille d’intervalles ouverts

$$I_n = (0, 1/n), \quad \forall n \geq 1, \quad \text{et} \quad I_0 = (0, 1).$$

On a bien une famille d’intervalles emboîtés et $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, mais pourtant $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \emptyset$.

En effet, par la propriété d’Archimède, il n’existe aucun $x > 0$ tel que $x < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée :

$$a \leq x_n \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a < b.$$

— Etape 1 : Construisons une famille d'intervalles emboîtés.

Posons

$$I_0 = [a_0, b_0], \quad a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad l_0 = b_0 - a_0.$$

Clairement $x_n \in I_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, au moins un des deux intervalles

$$[a_0, (a_0 + b_0)/2], \quad [(a_0 + b_0)/2, b_0]$$

contient une infinité de termes de la suite. On choisit celui-ci et on le note

$$I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0, \quad l_1 = b_1 - a_1 = \frac{l_0}{2}.$$

On procède de la même manière pour choisir I_2 parmi les intervalles

$$[a_1, (a_1 + b_1)/2], \quad [(a_1 + b_1)/2, b_1],$$

et on a $l_2 = l_1/2 = l_0/2^2$.

En itérant ce procédé, on obtient une famille d'intervalles emboîtés $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont la suite des longueurs $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_0}{2^n} = 0.$$

On applique alors le lemme 2.4.5 qui nous assure l'existence d'un $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{c\}, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

— Etape 2 : Construisons à présent une sous-suite qui converge vers c .

On choisit $y_0 = x_0$, puis $y_1 = x_{n_1} \in I_1$, où n_1 est le plus petit indice strictement positif tel que $x_{n_1} \in I_1$. On pose ensuite $y_2 = x_{n_2} \in I_2$, où n_2 est le plus petit indice strictement supérieur à n_1 tel que $x_{n_2} \in I_2$, etc.

Ainsi $y_k = x_{n_k} \in I_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = c$. ♦

2.5 Suites de Cauchy

2.5.1 Définition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

On écrira parfois simplement $\lim_{n, m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0$ ou $|x_n - x_m| \longrightarrow 0 \ (n, m \rightarrow \infty)$.

2.5.2 Remarque

Il est important de remarquer que $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ ne suffit pas pour que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy. Par exemple, la suite de terme général $x_n = \ln(n)$, $n \geq 1$, satisfait

$$x_{n+1} - x_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

mais $x_n \rightarrow +\infty$. D'autres exemples sont donnés par les suites de terme général $\sin(\ln(n))$ ou encore $\sin(\sqrt{n})$. Ces suites sont bornées mais divergent en raison des oscillation du sinus (cf. vidéos du cours pour les détails).

Il est alors naturel se poser la question suivante : est-ce que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ suffisamment vite lorsque $n \rightarrow \infty$? Nous verrons à la remarque 3.1.6 que c'est le cas s'il existe $C > 0$, $\alpha > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}, \quad \forall n \geq n_0.$$

2.5.3 Théorème

Une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Démonstration Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$:

Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et posons $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour tout $n, m \geq N(\varepsilon)$, on va avoir

$$|x_n - x_m| = |(x_n - l) - (x_m - l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.

$\Leftarrow$:

Supposons à présent que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon).$$

La suite de la preuve se déroule en deux étapes.

— Étape 1 : Nous montrons dans un premier temps que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Choisissons $m = N(\varepsilon)$ ci-dessus. Alors, pour tout $n > N(\varepsilon)$,

$$x_{N(\varepsilon)} - \varepsilon < x_n < x_{N(\varepsilon)} + \varepsilon.$$

En posant

$$a = \min\{x_0, x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)}, x_{N(\varepsilon)} - \varepsilon\}$$

et

$$b = \max\{x_0, x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)}, x_{N(\varepsilon)} + \varepsilon\},$$

on a alors que $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

- Etape 2 : On peut maintenant utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on sait qu'elle admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Notons l sa limite. Alors il existe $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq K(\varepsilon).$$

Fixons $k_0 \geq K(\varepsilon)$ tel que $n_{k_0} \geq N(\varepsilon/2)$. Alors pour tout $n \geq N(\varepsilon/2)$,

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_{k_0}} + x_{n_{k_0}} - l| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration. ♦

2.5.4 Remarque

Le théorème précédent illustre ici dans le cas particulier des nombres réels une notion topologique très importante en analyse : la *complétude*.

On considère en topologie des ensembles caractérisés par des propriétés très peu restrictives. Certains d'entre eux ont l'agréable avantage de pouvoir être munis d'une *métrique*.

Si M est un ensemble, on appelle *métrique* (ou *distance*) une application $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

- (i) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in M,$
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y,$
- (iii) $d(y, x) = d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in M.$

S'il existe une telle application, on dit que (M, d) est un *espace métrique*.

On peut considérer une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ et on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in M$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad d(x_n, l) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

De manière analogue, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ est dite *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

On dit que M est un espace métrique *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de M possède une limite dans M . (En s'inspirant du cas $M = \mathbb{R}$, on montre aisément en utilisant l'inégalité triangulaire que toute suite convergente dans un espace métrique est une suite de Cauchy.)

On vérifie facilement que $\mathbb{R}$, muni de la *distance euclidienne* $d(x, y) = |x - y|$, est un espace métrique, et le théorème 2.5.3 affirme qu'il est complet. En revanche, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas complet pour la distance $|x - y|$. Par exemple, n'importe quelle suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$ est de Cauchy mais n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

Finalement, la complétude de $\mathbb{R}$ a pour nous un intérêt très pratique : on peut vérifier qu'une suite est convergente sans connaître sa limite.

2.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les propriétés suivantes décrivent les relations fondamentales entre nombres rationnels et irrationnels.

2.6.1 Proposition (*densité par rapport à l'ordre 1*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.

Démonstration Cf. exercices. ♦

2.6.2 Proposition (*densité par rapport à l'ordre 2*)

Soit $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Alors il existe $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.

Démonstration Montrons que $c = a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b - a)$ est un bon candidat.

Premièrement, $c \in (a, b)$ car $\frac{\sqrt{2}}{2} \in (0, 1)$. D'autre part, si c était rationnel, on aurait que $\sqrt{2} = 2\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{Q}$, puisque $a, b \in \mathbb{Q}$. Ainsi c est bien irrationnel. ♦

Ainsi, on peut trouver toujours un rationnel entre deux irrationnels, aussi proches soient-ils, et réciproquement.

2.6.3 Proposition (*densité par rapport aux suites 1*)

Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = l$.

Démonstration Puisque $\mathbb{R}$ est équipotent à $[0, 1]$ (i.e. est en bijection avec cet intervalle, cf. cours d'algèbre linéaire), on peut restreindre la démonstration à $[0, 1]$.

Soit $l \in [0, 1]$. On distingue deux cas :

- ★ Si $l \in \mathbb{Q}$, alors on prend la suite constante définie par $r_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ★ Si $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et que $l = 0, \delta_1 \delta_2 \dots$ est le développement décimal de l , on prend la suite de terme général $r_n = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n 000 \dots$; i.e. la n -ième approximation r_n est obtenue en tronquant le développement de l après la n -ième décimale. On a alors bien que $r_n \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, nous prouverons à la remarque 3.1.6 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = l. \quad \blacklozenge$$

2.6.4 Proposition (*densité par rapport aux suites 2*)

Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = l$.

Démonstration On peut à nouveau restreindre la démonstration à $[0, 1]$.

Soit $l \in [0, 1]$. On distingue deux cas :

- ★ Si $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors on prend la suite constante définie par $r_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★ Si $l \in \mathbb{Q}$, on prend la suite de terme général $r_n = l + \sqrt{2}/n$, $n \geq 1$, et on a bien que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = l \quad \text{et} \quad r_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \forall n \geq 1. \quad \blacklozenge$$

Les deux résultats précédents, qui ont des conséquences importantes sur les propriétés des fonctions continues, sont souvent formulés de la façon suivante : on dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$, ce qui exprime le fait que tout nombre réel peut être approché aussi près qu'on veut par un rationnel ou un irrationnel.

On peut maintenant résumer les propriétés principales de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels est un corps commutatif ordonné non-dénombrable ayant la propriété d'Archimède et la propriété de la borne supérieure. De plus, le sous-corps des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Finalement, $\mathbb{R}$ est complet, dans le sens que toute suite de Cauchy de réels a une limite.

Chapitre 3

Séries numériques

Nous exposons ici la notion de série numérique qui devra être bien maîtrisée lorsque l'on abordera par la suite l'étude des séries entières et des fonctions analytiques. Nous énonçons et démontrons les résultats de convergence les plus importants.

3.1 Définitions et exemples

3.1.1 Définition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On forme une nouvelle suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}s_0 &= x_0, \\s_1 &= x_0 + x_1, \\s_2 &= x_0 + x_1 + x_2, \\&\dots \\s_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Autrement dit, $s_n := \sum_{k=0}^n x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle *suite des sommes partielles* la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $s \in \mathbb{R}$, on écrit alors

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

et on dit que la *série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *convergente*. On appelle s la *valeur* ou la *somme* de la série. Si ce n'est pas le cas, on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *divergente*.

On peut immédiatement énoncer une condition nécessaire (mais pas suffisante!) de convergence.

3.1.2 Proposition

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est une série convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Démonstration On a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ convergente} \iff (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergente} \iff (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy.}$$

En particulier, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varepsilon > |s_{n+1} - s_n| = |x_{n+1}|, \quad \forall n \geq N(\varepsilon),$$

et donc $|x_{n+1}| \longrightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). ♦

Nous donnons maintenant une condition de convergence nécessaire et suffisante.

3.1.3 Proposition

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Démonstration La série est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est de Cauchy, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,$$

ce qui donne bien (3.1). ♦

3.1.4 Remarques

- (i) En laissant $p \rightarrow \infty$ dans (3.1), on déduit que, si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = 0. \quad (3.2)$$

On dit que “la queue de la série” tend vers zéro.

- (ii) Si pour un $n_0 \in \mathbb{N}$ donné la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ converge (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n x_k$ existe), alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge également. Ceci se voit aisément en appliquant la proposition 3.1.3, ou simplement en écrivant

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$$

et en remarquant que la somme $x_0 + x_1 + \dots + x_{n_0-1}$ n’a pas d’influence sur la convergence ou non de la série. En d’autres termes, ajouter ou retrancher **un nombre fini de termes** ne change pas la convergence de la série.

- (iii) **Critère pour les séries à termes positifs** : la suite des sommes partielles $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On a donc l’alternative : soit $s_n \longrightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et converge vers $s := \sup(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.1.5 Exemples

- (i) série télescopique : Considérons la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ de terme général

$$x_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Pour étudier la convergence, on utilise la décomposition de la fraction en éléments simples, ci-dessus. On constate que tous les termes de la n-ième somme partielle s'annulent deux à deux sauf le premier et le dernier (d'où le nom de série télescopique) :

$$s_n = x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

et donc $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

- (ii) série géométrique : Soit $r \in \mathbb{R}$. Posons $x_0 = 1$ et $x_n = r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite des sommes partielles est donnée par

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ pour } r \neq 1.$$

Si $|r| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Si $|r| \geq 1$, on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \neq 0$, ce qui implique que la série est divergente par la proposition 3.1.2.

En résumé, la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \begin{cases} \text{converge vers } \frac{1}{1-r} & \text{si } |r| < 1, \\ \text{diverge} & \text{si } |r| \geq 1. \end{cases}$$

- (iii) série harmonique : La série harmonique est définie comme $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

On constate tout d'abord que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, ce qui implique que la série est **peut-être** convergente ; nous pouvons donc poursuivre notre étude.

Puisque $1/n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Faisons maintenant une estimation :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} = s_1 + \frac{1}{2}, \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = s_2 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} > s_2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De manière analogue, on trouve pour s_8 :

$$s_8 = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{=s_4} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{>4\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} > s_4 + \frac{1}{2}.$$

En s'inspirant de ce qui précède, on montre aisément par récurrence que

$$s_{2^m} > s_{2^{m-1}} + \frac{1}{2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Par itérations successives, on obtient alors

$$s_{2^m} > s_{2^{m-1}} + \frac{1}{2} > s_{2^{m-2}} + 2\frac{1}{2} > \dots > s_1 + m\frac{1}{2},$$

d'où $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2^m} = \infty$.

Montrons maintenant que $s_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Soit $M > 0$. On choisit $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $s_{2^{m_0}} > M$. Alors, puisque $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a :

$$\forall n \geq 2^{m_0}, \quad s_n \geq s_{2^{m_0}} > M,$$

d'où le résultat.

3.1.6 Remarques

- (i) Grâce à l'exemple (ii), nous pouvons maintenant compléter la preuve de la proposition 2.6.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On remarque que, pour tout $N > n$,

$$\sum_{k=n+1}^N \delta_k 10^{-k} \leq 9 \sum_{k=n+1}^N 10^{-k}.$$

Par l'exemple (ii), nous savons que le membre de droite de cette inégalité possède une limite (et en particulier reste borné) lorsque $N \rightarrow \infty$. Puisque le membre de gauche est une somme partielle à termes positifs, on déduit de la remarque 3.1.4 (iii) qu'il possède aussi une limite lorsque $N \rightarrow \infty$. Il découle donc de la proposition 2.1.7 (iv) que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k 10^{-k} \leq 9 \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k}.$$

Par la remarque 3.1.4 (ii), cet argument rend légitime l'écriture

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k 10^{-k}$$

et la remarque 3.1.4 (i) donne bien

$$|l - r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k 10^{-k} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k 10^{-k} \leq 9 \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

On déduit finalement du principe des deux gendarmes que $r_n \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$).

- (ii) A l'exemple (iii), on constate que $|s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ mais pourtant $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy car elle est divergente. En effet, il faut bien comprendre que, comme vu précédemment, la condition $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$ n'est pas suffisante pour qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy ; on doit avoir que $|x_{n+p} - x_n| \rightarrow 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

La série harmonique diverge car le terme général $1/n$ ne tend pas vers zéro assez vite. Nous allons bientôt voir (cf. corollaire 3.2.16) que la série de terme général $1/n^\alpha$ est convergente pour tout $\alpha > 1$. Ce résultat permet notamment de montrer que, comme annoncé à la remarque 2.5.2, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}, \quad \forall n \geq n_0,$$

est convergente. En effet, on obtient pour tout $n \geq n_0$ et $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} |x_{k+1} - x_k| \leq C \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^\alpha}. \end{aligned}$$

On conclut bien que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy car la queue de la série $\sum_{k \geq 1} 1/k^\alpha$ tend vers zéro.

3.1.7 Définition

On dit que deux séries ont *même nature* si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

3.1.8 Proposition

Soit $c \neq 0$. Alors, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ont même nature. De plus, si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Démonstration Posons $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ et $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n cx_k$. Puisque

$$\forall n \geq 0, \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n cx_k = c \sum_{k=0}^n x_k = cs_n, \quad s_n = c^{-1} \tilde{s}_n,$$

il est clair que $(\tilde{s}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. De plus, si $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a bien que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

ce qui termine la preuve. ♦

3.1.9 Définition

On dit qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *absolument convergente* si la série des valeurs absolues $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est convergente.

3.1.10 Proposition

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration Posons $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ et $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n |x_k|$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $(\tilde{s}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et de Cauchy, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\tilde{s}_{n+p} - \tilde{s}_n = |\tilde{s}_{n+p} - \tilde{s}_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Puisque $(\tilde{s}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on déduit que

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k| = \tilde{s}_{n+p} - \tilde{s}_n < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et la série est bien convergente. ♦

On verra bientôt que la réciproque de la proposition 3.1.10 n'est pas vraie.

3.2 Critères de convergence

3.2.1 Définition

On dit qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *alternée* si $x_n x_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Théorème (*critère de Leibniz pour les séries alternées*)

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ une série alternée vérifiant :

- ★ $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- ★ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Alors la série est convergente.

Démonstration On suppose sans perte de généralité que $x_0 > 0$. On a alors que $x_{2n} > 0$, $x_{2n+1} < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Considérons la sous-suite des sommes partielles d'indices impairs $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. On a

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= s_{2n+1} + x_{2n+2} + x_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + \underbrace{(x_{2n+2} - |x_{2n+3}|)}_{\geq 0} \geq s_{2n+1}, \end{aligned}$$

et donc $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite croissante. Un raisonnement analogue montre que $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On remarque aussi que $s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1} < s_{2n}$ et que

$$s_{2n} - s_{2n+1} = -x_{2n+1} \longrightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Le principe des intervalles emboîtés (lemme 2.4.5), appliqué aux intervalles $[s_{2n+1}, s_{2n}]$, $n \in \mathbb{N}$, nous assure alors l'existence d'un $s \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s.$$

On conclut ainsi que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. ♦

L'exemple suivant illustre bien l'utilité de ce critère tout en donnant un contre-exemple à la réciproque de la proposition 3.1.10.

3.2.3 Exemple

La série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ satisfait les hypothèses du critère de Leibniz, elle est donc convergente. En revanche, comme on l'a vu, elle n'est pas absolument convergente.

3.2.4 Théorème (1er critère de comparaison)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$. On a alors les deux critères :

- (i) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leq p_n$ pour tout $n \geq n_0$ et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ est convergente, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge absolument.
- (ii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \geq p_n$ pour tout $n \geq n_0$ et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ diverge.

Démonstration On définit, pour tout $n \geq n_0$,

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=n_0}^n |x_k|, \quad \hat{s}_n = \sum_{k=n_0}^n p_k.$$

- (i) L'hypothèse $|x_n| \leq p_n$ entraîne $\tilde{s}_n \leq \hat{s}_n$, pour tout $n \geq n_0$. D'autre part, puisque la suite $(\hat{s}_n)_{n \geq n_0}$ est convergente, elle est bornée. Par conséquent, $(\tilde{s}_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et bornée, donc convergente.
- (ii) Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}_n = \infty$ et $\tilde{s}_n \geq \hat{s}_n$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n = \infty$. ♦

3.2.5 Remarque

Dans le cas (ii), on peut néanmoins avoir que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge. On s'en convainc aisément en prenant, par exemple, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $p_n = \frac{1}{n}$ et $n_0 = 1$.

3.2.6 Exemple

Par comparaison avec la série harmonique, on voit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$ diverge. En effet,

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(1+n) < n \implies \frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{n}.$$

3.2.7 Théorème (2ème critère de comparaison)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ avec $p_n > 0$, $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) S'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad \forall n \geq n_1.$$

et si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ est convergente, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge absolument.

(ii) S'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \geq \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad \forall n \geq n_1.$$

et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ diverge.

Démonstration Nous prouvons (i), la preuve de (ii) est analogue. En raisonnant par itération, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad \forall n \geq n_1 &\iff \frac{|x_{n+1}|}{p_{n+1}} \leq \frac{|x_n|}{p_n}, \quad \forall n \geq n_1 \\ \implies |x_{n+1}| \leq p_{n+1} \frac{|x_n|}{p_n} &\leq p_{n+1} \frac{|x_{n-1}|}{p_{n-1}} \leq \dots \leq p_{n+1} \frac{|x_{n_1}|}{p_{n_1}}, \quad \forall n \geq n_1. \end{aligned}$$

Par la proposition 3.1.8, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_{n_1}|}{p_{n_1}} p_n$ converge ssi $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ converge. On conclut alors par le 1er critère, en comparant $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_{n_1}|}{p_{n_1}} p_n$. ♦

3.2.8 Théorème (3ème critère de comparaison)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ avec $p_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n|}{p_n} = k \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

On a alors :

- (i) Si $0 < k < \infty$, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ et $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ ont même nature, i.e. elles sont soit toutes deux convergentes, soit toutes deux divergentes.
- (ii) Si $k = 0$ et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ est convergente, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ l'est aussi.
- (iii) Si $k = \infty$ et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ est divergente, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ l'est aussi.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies \left| \frac{|x_n|}{p_n} - k \right| < \varepsilon \iff p_n(k - \varepsilon) < |x_n| < p_n(k + \varepsilon).$$

Le point (i) découle alors de la proposition 3.1.8 et du 1er critère de comparaison, en choisissant ci-dessus $\varepsilon < k$.

Pour le point (ii), on remarque qu'avec $k = 0$ dans l'argument ci-dessus on a $|x_n| < \varepsilon p_n$ et il suffit donc d'appliquer à nouveau le 1er critère pour conclure.

Quant au point (iii), si $k = \infty$ on va avoir que

$$\forall M > 0, \exists n_1 = n_1(M) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}$$

$$n \geq n_1 \implies \frac{|x_n|}{p_n} > M \implies |x_n| > Mp_n.$$

Toujours par le 1er critère, on a donc bien que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est divergente si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ est divergente. ♦

3.2.9 Remarque

Dans le cas (i), on écrira $|x_n| \sim kp_n$ ($n \rightarrow \infty$). Si $|x_n| \rightarrow 0$ et $p_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on dira alors que $|x_n|$ et p_n tendent vers zéro à la *même vitesse*.

3.2.10 Exemple

Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3 + 2}.$$

On remarque que

$$\frac{\sqrt{n^5}}{n^3 + 2} \sim \frac{n^{5/2}}{n^3} = n^{-1/2}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ est divergente, on conclut par le 3ème critère de comparaison que la série proposée est aussi divergente.

3.2.11 Critère du quotient (*d'Alembert*)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$. Supposons que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = l \geq 0.$$

On a alors :

(i) $0 \leq l < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est absolument convergente ;

(ii) $l > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est divergente.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} - l \right| < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |x_{n_0}|(l - \varepsilon) &< |x_{n_0+1}| < |x_{n_0}|(l + \varepsilon), \\ |x_{n_0+1}|(l - \varepsilon) &< |x_{n_0+2}| < |x_{n_0+1}|(l + \varepsilon), \\ &\dots \\ |x_{n_0+p-2}|(l - \varepsilon) &< |x_{n_0+p-1}| < |x_{n_0+p-2}|(l + \varepsilon) \\ |x_{n_0+p-1}|(l - \varepsilon) &< |x_{n_0+p}| < |x_{n_0+p-1}|(l + \varepsilon). \end{aligned}$$

Ainsi, en itérant les inégalités, il vient, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_{n_0}|(l - \varepsilon)^p < |x_{n_0+p}| < |x_{n_0}|(l + \varepsilon)^p.$$

Nous pouvons alors conclure la démonstration en utilisant ces inégalités de la façon suivante.

- (i) Supposons que $0 \leq l < 1$ et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon =: q < 1$. On a alors que $|x_{n_0+p}| < |x_{n_0}|q^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Mais la série $\sum_{p=0}^{\infty} q^p$ est convergente pour tout $0 < q < 1$. Par le 1er critère, $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est donc bien convergente.
- (ii) Soit maintenant $l > 1$. Prenons $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon =: r > 1$. On a alors que $r^p |x_{n_0}| < |x_{n_0+p}|$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$ et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est divergente par la proposition 3.1.2. ♦

3.2.12 Critère de la racine (*Cauchy*)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Supposons que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l \geq 0.$$

On a alors :

- (i) $0 \leq l < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est absolument convergente ;
- (ii) $l > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est divergente.

Démonstration Ce critère se démontre en s'inspirant de la démonstration précédente et en utilisant les inégalités

$$(l - \varepsilon)^n < |x_n| < (l + \varepsilon)^n, \quad \forall n \geq n_0. \quad \blacklozenge$$

3.2.13 Remarques

- (i) On ne peut rien tirer des deux critères précédents dans le cas $l = 1$.
- (ii) On peut montrer que, pour $p_n > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p_n]{p_n} = l,$$

et donc les critères du quotient et de la racine sont équivalents pour autant que les deux limites ci-dessus existent.

Attention ! Il se peut que la limite du quotient n'existe pas alors que la limite de la racine existe (cf. exercices). En ce sens, le critère de Cauchy est plus fort que celui de d'Alembert.

3.2.14 Exemples

(i) La série de terme général $x_n = 1/n!$ est convergente. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

(ii) Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$. On applique le critère du quotient au terme général $x_n = \frac{1}{n^n}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\leq 1} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ou plus simplement par le critère de la racine :

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

La série est donc convergente. On aurait aussi pu utiliser un critère de comparaison avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$, pour $\alpha > 1$.

3.2.15 Critère de condensation (*Cauchy*)

Soit $(p_n)_{n \geq 1} \subset (0, \infty)$ une suite décroissante. Alors les séries $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n p_{2^n}$ ont même nature.

Démonstration Soit $s_n = \sum_{i=1}^n p_i$, $\tilde{s}_k = \sum_{j=0}^k 2^j p_{2^j}$. On a alors les estimations suivantes.

Pour $n \leq 2^k$:

$$\begin{aligned} s_n &\leq p_1 + (p_2 + p_3) + (p_4 + p_5 + p_6 + p_7) + \cdots + \underbrace{(p_{2^k} + \cdots + p_{2^{k+1}-1})}_{2^k \text{ termes}} \\ &\leq p_1 + 2p_2 + 4p_4 + \cdots + 2^k p_{2^k} = \tilde{s}_k. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2^k$:

$$\begin{aligned} s_n &\geq p_2 + (p_3 + p_4) + (p_5 + p_6 + p_7 + p_8) + \cdots + \underbrace{(p_{2^{k-1}+1} + \cdots + p_{2^k})}_{2^{k-1} \text{ termes}} \\ &\geq p_2 + 2p_4 + 4p_8 + \cdots + 2^{k-1} p_{2^k} = \frac{1}{2}(2p_2 + 4p_4 + \cdots + 2^k p_{2^k}) = \frac{1}{2}(\tilde{s}_k - p_1). \end{aligned}$$

On conclut de ces inégalités que $(s_n)_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si $(\tilde{s}_k)_{k \geq 0}$ est bornée, d'où la conclusion. ♦

3.2.16 Corollaire

La série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ est convergente pour $\alpha > 1$, divergente sinon.

Démonstration Si $\alpha \leq 0$, la série est évidemment divergente car $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^\alpha \neq 0$. Pour $\alpha > 0$, la suite $(1/n^\alpha)_{n \geq 1}$ est positive décroissante. Alors, par le critère de condensation, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$$

ont même nature. Or la série géométrique de raison $2^{1-\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. ♦

3.2.17 Remarque

Les critères du quotient et de la racine ne donnent pas d'information sur la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$; on trouve dans les deux cas une limite égale à 1.

3.2.18 Exemple

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln(n)}$, $a > 0$. En remarquant que

$$a^{\ln(n)} = n^{\ln(a)} = 1/n^{\ln(1/a)},$$

on conclut par le corollaire 3.2.16 que la série converge si et seulement si $\ln(1/a) > 1$, i.e. ssi $a < 1/e$.

3.2.19 Généralisation (*Schlömilch*)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ une série à termes strictement positifs et décroissants :

$$p_n > 0, \quad p_{n+1} \leq p_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Soit $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{N}^*$ une suite strictement croissante, telle que la suite de terme général

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}, \quad n \geq 2,$$

est bornée. Alors les séries $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)p_{a_n}$ ont même nature.

Démonstration Posons $r_n = p_{a_{n+1}} + p_{a_{n+2}} + \dots + p_{a_{n+1}}$. Par définition de r_n et puisque $(p_{a_n})_{n \geq 1}$ est décroissante, on a que

$$\underbrace{p_{a_{n+1}} + p_{a_{n+1}} + \dots + p_{a_{n+1}}}_{a_{n+1} - a_n \text{ termes}} \leq r_n \leq \underbrace{p_{a_n} + p_{a_n} + \dots + p_{a_n}}_{a_{n+1} - a_n \text{ termes}},$$

d'où

$$(a_{n+1} - a_n)p_{a_{n+1}} \leq r_n \leq (a_{n+1} - a_n)p_{a_n}. \quad (3.3)$$

D'autre part, $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}$ est borné et il existe donc $M > 0$ tel que

$$0 < \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} < M, \quad \forall n \geq 2.$$

Alors

$$(a_{n+1} - a_n)p_{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}(a_{n+2} - a_{n+1})p_{a_{n+1}} > \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{M}p_{a_{n+1}},$$

et ainsi, par (3.3),

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{M}p_{a_{n+1}} < r_n \leq (a_{n+1} - a_n)p_{a_n}.$$

Donc les séries $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)p_{a_n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ ont même nature. On conclut en remarquant par calcul direct que

$$\sum_{k=1}^n r_k = \sum_{k=a_1}^{a_n} p_k = \sum_{k=1}^{a_n} p_k - (p_1 + \cdots + p_{a_1-1}).$$

Comme $a_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ceci montre que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ont même nature, d'où le résultat. ♦

3.2.20 Exemple

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} r\sqrt{n}$, $r \in (0, 1)$. On peut appliquer le critère 3.2.19 avec $a_n = n^2$ et on obtient que la série converge si et seulement si la série de terme général

$$x_n := ((n+1)^2 - n^2)r^n = (2n+1)r^n, \quad n \geq 1,$$

est convergente. Or le critère du quotient donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r \frac{2n+3}{2n+1} = r \in (0, 1),$$

donc la série converge.

Nous donnons encore ici un dernier critère qui permet parfois de déterminer la convergence / divergence d'une série lorsque le critère du quotient ne permet pas de conclure, i.e. dans le cas où $|x_{n+1}/x_n| \rightarrow 1$.

3.2.21 Critère de Raabe-Duhamel

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right| - 1 \right) = \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

On a alors les résultats suivants :

- (i) Si $\alpha < 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est divergente.
- (ii) Si $0 < \alpha \leq 1$ et $x_n x_{n+1} < 0$ (série alternée), alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente.
- (iii) Si $0 \leq \alpha < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est divergente.
- (iv) Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ est convergente.

Démonstration Nous renvoyons à l'article très intéressant

<https://arxiv.org/pdf/1801.07584.pdf> ♦

3.2.22 Remarques

(i) Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ du corollaire 3.2.16, utilisant $f(x) = x^\alpha$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right| - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 1/n)^\alpha - 1}{1/n} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = f'(1) = \alpha. \end{aligned}$$

On retrouve donc par Raabe-Duhamel que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ diverge si $\alpha < 1$ et converge pour $\alpha > 1$. Noter que la conclusion du corollaire 3.2.16 est plus forte car Raabe-Duhamel ne donne pas d'information sur les séries à termes positifs dans le cas $\alpha = 1$.

D'autre part, le calcul précédant conduit à la remarque méthodologique suivante. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ satisfaisant (3.4). Alors les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ converge / diverge sont les mêmes que pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$. Ainsi, le critère de Raabe-Duhamel est une manière de comparer une série quelconque avec une série du type $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$, sans connaître la valeur de la puissance α *a priori*.

- (ii) Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ satisfaisant les cas (ii) et (iii), i.e. vérifiant (3.4) avec $\alpha \in (0, 1)$, donne lieu à une série convergente mais pas absolument convergente. Par exemple, $x_n = (-1)^{n-1}/n^\alpha$ avec $\alpha \in (0, 1)$.
- (iii) Noter que le cas $\alpha = 0$ n'est pas couvert par (ii). En effet, on peut avoir des séries alternées convergentes ou divergentes satisfaisant (3.4) avec $\alpha = 0$. Par exemple :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \text{ diverge } \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)} \text{ converge (par Leibniz).}$$

On vérifie aisément que $\alpha = 0$ dans les deux cas.

3.3 Permutation de l'ordre des termes

Si l'on permute l'ordre de sommation des termes dans une série numérique, la suite des sommes partielles s'en trouve modifiée. Une question naturelle se pose alors : si la série de départ est convergente, la série permutée l'est-elle aussi et converge-t-elle vers la même valeur ?

3.3.1 Théorème

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ une série absolument convergente. Si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ est aussi absolument convergente et l'on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_{\sigma(k)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

Démonstration L'idée de la démonstration est de contrôler la queue de la série des valeurs absolues et d'utiliser la majoration ainsi obtenue pour prouver la convergence. Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Choissant un entier $M \geq N$ assez grand, on a que $\{0, \dots, N\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(M)\}$. Ainsi, si $m, n \geq M$ les termes $x_0, x_1, \dots, x_N$ s'annulent dans la différence $\sum_{j=0}^n x_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^m x_k$ et on a donc

$$\left| \sum_{j=0}^n x_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^m x_k \right| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon.$$

Laissant $m \rightarrow \infty$, il vient

$$\left| \sum_{j=0}^n x_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq M,$$

ce qui montre que la série $\sum_{j=0}^{\infty} x_{\sigma(j)}$ converge vers la même valeur que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

En remplaçant partout x_k et $x_{\sigma(j)}$ respectivement par $|x_k|$ et $|x_{\sigma(j)}|$ dans le raisonnement ci-dessus, on voit qu'on a aussi $\sum_{j=0}^{\infty} |x_{\sigma(j)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$. ♦

Le lemme précédent est mis en défaut si la série est convergente mais pas absolument convergente. (On parle alors de série *conditionnellement convergente*.) Le résultat suivant dû à Riemann est fort surprenant et nous dit même beaucoup plus.

3.3.2 Théorème (*Riemann*)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ une série convergente mais pas absolument convergente. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. D'autre part, il existe aussi des permutations $\tau_{\pm}$ telle que $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\tau_{\pm}(n)} = \pm\infty$.

Démonstration Cf. exercices. ♦

Chapitre 4

Fonctions, limites, continuité

Nous présentons dans ce chapitre de façon précise et rigoureuse les notions de limite et de continuité d'une fonction, notions beaucoup utilisées au lycée, souvent sans définitions formelles. Nous introduisons ici les définitions les plus générales concernant les limites (finies ou infinies) des fonctions réelles d'une variable réelle. Nous définissons également la continuité des fonctions, et nous présentons les propriétés les plus importantes des fonctions continues. La notion de continuité sera essentielle pour la suite du cours, dans la mesure où c'est le premier pas (condition nécessaire) vers la notion de dérivée, qui joue un rôle crucial en analyse. On verra également que la continuité est au cœur de la théorie de l'intégrale de Riemann, qui sera développée au chapitre 8.

4.1 Rappels

Nous commençons par rappeler les notions élémentaires suivantes :

- (i) La règle de correspondance $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$ (on prend généralement $\mathbb{R}$ pour l'ensemble d'arrivée) est appelée *fonction réelle d'une variable réelle* si $D(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in D(f)$ il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

On rappelle la définition du *graphe* de f :

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D(f), y = f(x)\}.$$

- (ii) Les opérations sur les fonctions (addition, multiplication, etc.) sont définies ponctuellement (point par point), comme vu à la section 1.3.7.
- (iii) On note $f \leq g$ si pour tout $x \in D(f) \cap D(g)$ on a $f(x) \leq g(x)$. De même pour l'égalité ou pour l'inégalité stricte.
- (iv) On dit que f est *bornée* sur $A \subset D(f)$ s'il existe une constante positive M telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in A$.
- (v) On définit le *supremum* (ou *borne supérieure*) de f sur $A \subset D(f)$, noté $\sup_{x \in A} f(x)$ comme étant le supremum de $f(A) := \{f(x); x \in A\}$. En d'autres termes, $f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x)$ pour tout $x \in A$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \quad \text{tel que} \quad \sup_{x \in A} f(x) - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon) \leq \sup_{x \in A} f(x).$$

De même pour l'*infimum*.

Les propriétés suivantes découlent des définitions :

- $\inf_{x \in A} (-f(x)) = -\sup_{x \in A} f(x),$
- $\sup_{x \in A} (f(x) + c) = \sup_{x \in A} f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$
- $\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x), \quad A \subset D(f) \cap D(g),$
- $B \subset A \Rightarrow \sup_{x \in B} f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x).$

- (vi) On dit que f admet un *maximum local* au point $a \in D(f)$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D(f) \quad \text{et} \quad |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(a).$$

On dit de même que f admet un *minimum local* au point $a \in D(f)$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D(f) \quad \text{et} \quad |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(a).$$

- (vii) On dit que $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) est un *maximum global* (resp. *minimum global*), ou simplement un *maximum* de f , si $M \in \text{Im}(f)$ (resp. $m \in \text{Im}(f)$) et si $f(x) \leq M$ (resp. $f(x) \geq m$) pour tout $x \in D(f)$. On note alors

$$m = \min_{x \in D(f)} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in D(f)} f(x).$$

- (viii) On appelle *extremum* (local ou global) une valeur correspondant soit à un minimum (local ou global) soit à un maximum (local ou global).

4.2 Limites d'une fonction

4.2.1 Définition

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$.

- (i) On dit que f est *définie au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $(a - \delta, a + \delta) \subset D(f) \cup \{a\}$ (i.e. f est définie sur $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$).
- (ii) On appelle *voisinage* de a tout intervalle ouvert contenant le point a . On parle de δ -voisinage pour un intervalle ouvert de la forme $(a - \delta, a + \delta)$.
- (iii) On appelle *voisinage pointé* de a tout voisinage de a privé du point a , i.e. tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $I \setminus \{a\}$ où I est un voisinage de a .
- (iv) On parle de *voisinage à gauche* de a pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la forme $(a - \delta, a]$, $\delta > 0$, et on définit naturellement le *voisinage à droite* de façon analogue ainsi que le *voisinage pointé à gauche* (resp. *à droite*).
- (v) On dit que f est *définie au voisinage de* $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que $(A, +\infty) \subset D(f)$, avec une définition analogue *au voisinage de* $-\infty$.

4.2.2 Remarque

Une fonction f peut être définie au voisinage de a sans que $a \notin D(f)$. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ n'est pas définie au point $x = 0$ mais elle est définie au voisinage de 0.

4.2.3 Définition

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour *limite* le nombre $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a (ou que f *converge* vers l au point a) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que}$$

$$x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \rightarrow l \quad (x \rightarrow a).$$

4.2.4 Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

satisfait $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. En effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, et $\delta > 0$ quelconque, on a que

$$0 < |x| < \delta \implies |f(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Le théorème suivant permet d'identifier la notion de convergence des fonctions à celle de convergence des suites largement discutée précédemment. Nous y ferons fréquemment recours dans la mesure où il est souvent plus commode de raisonner en termes de suites.

4.2.5 Théorème

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$, on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$

Démonstration Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$: Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

D'autre part, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, il existe $N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

$\Leftarrow$: Nous procédons ici par contraposition. Supposons que f ne converge pas vers l lorsque $x \rightarrow a$. Alors, par définition de la limite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe x_δ tel que $0 < |x_\delta - a| < \delta$ et $|f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\delta_n = 1/n$ et $x_n = x_{\delta_n}$. On obtient ainsi une suite $(x_n) \subset D(f) \setminus \{a\}$ telle que $x_n \rightarrow a$ et $(f(x_n))$ ne converge pas vers l . $\blacklozenge$

4.2.6 Corollaire

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$, la propriété

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

est vérifiée, alors f admet une limite au point a .

Démonstration Par le théorème 4.2.5, il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \tag{4.1}$$

pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$ qui convergent vers a . Supposons par l'absurde qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$ qui convergent vers a mais ne satisfont pas (4.1). Considérons la suite de terme général

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ y_n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f) \setminus \{a\}$ converge vers a mais $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, ce qui contredit notre hypothèse. $\blacklozenge$

4.2.7 Corollaire

La limite d'une fonction en un point, si elle existe, est unique.

Démonstration Par le théorème 4.2.5, l'unicité est une conséquence directe de l'unicité de la limite d'une suite. $\blacklozenge$

4.2.8 Proposition (*Principe des deux gendarmes*)

Soit f, g, h des fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

pour tout x dans un voisinage pointé de $x = a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \in \mathbb{R},$$

alors g possède une limite lorsque $x \rightarrow a$, qui satisfait $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

Démonstration Appliquer le théorème 4.2.5 de manière à pouvoir travailler avec des suites, puis appliquer le principe des deux gendarmes pour les suites. ♦

4.2.9 Définition (*limite à gauche, à droite*)

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage à gauche de $a \in \mathbb{R}$ (i.e. il existe $\gamma > 0$ tel que $(a - \gamma, a] \subset D(f) \cup \{a\}$).

On dit que f a pour *limite* le nombre $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a par valeurs inférieures (ou plus simplement que l est la *limite* de f à *gauche* de a) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que}$$

$$x \in D(f), \quad a - \delta < x < a \quad \implies \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$f(a^-) \equiv \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \rightarrow a^-).$$

On donne une définition analogue de la *limite à droite* de a et on écrit alors

$$f(a^+) \equiv \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \rightarrow a^+).$$

4.2.10 Définition (*limite en $\pm\infty$*)

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un *voisinage de $+\infty$* .

On dit que f admet pour *limite* le nombre $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ (ou encore que l est la *limite* de f en $+\infty$) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \quad \text{tel que}$$

$$x \in D(f), \quad x > M \quad \implies \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \rightarrow +\infty).$$

On peut donner une définition analogue (essayez de la formuler) de la *limite en $-\infty$* ou la définir simplement comme la limite (si elle existe) de la fonction $f(-x)$ en $+\infty$.

On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow l \quad (x \rightarrow -\infty).$$

4.2.11 Définition (*limite infinie*)

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage I de $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a (ou au point a) si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \pm\infty$.

On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \longrightarrow \pm\infty \quad (x \rightarrow a).$$

On définit de manière analogue les limites infinies à gauche et à droite.

A titre d'exercice, la lectrice pourra aussi formuler la définition ci-dessus sans utiliser les suites, ou encore étendre les définitions 4.2.10 et 4.2.11 aux cas $l = \pm\infty$ et $a = \pm\infty$, respectivement.

4.2.12 Remarque

- (i) On montre sans peine à l'aide des définitions que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$ existent et sont égales.
- (ii) Le principe des deux gendarmes reste vrai si l'on remplace partout dans l'énoncé $\lim$ par $\lim_{x \rightarrow a^-}$, $\lim_{x \rightarrow a^+}$, ou encore par $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.
- (iii) On a également un "principe du chien méchant" : par exemple, si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x dans un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Nous laissons le soin au lecteur d'écrire ce principe dans les autres cas (limites à l'infini, limite qui vaut $-\infty$).

4.2.13 Exemples

- (i) La fonction $f(x) = 1/x$ a pour domaine (maximal) $D(f) = \mathbb{R}^*$. En particulier, f est définie au voisinage de $x = 0$. On a les limites suivantes en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty.$$

De manière plus compacte, on pourra écrire $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

- (ii) La fonction $f(x) = \sin(x)/x$ est définie sur $D(f) = \mathbb{R}^*$ et donc au voisinage de $x = 0$. Un argument géométrique classique utilisant le cercle trigonométrique (cf. cours) montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

4.2.14 Proposition

Soit f et g définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que les limites suivantes existent dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2.$$

On a alors les règles de calcul suivantes :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = l_1 l_2.$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = l_1/l_2$ si $l_2 \neq 0.$

Démonstration Appliquer le théorème 4.2.5 de manière à pouvoir travailler avec des suites, puis utiliser la proposition 2.2.1 donnant les règles de calcul pour les limites des suites. ♦

4.2.15 Remarque

Pour le point (iii), on vérifie à l'aide de la définition de limite que, si $l_2 \neq 0$ alors il existe un voisinage pointé de a sur lequel g ne s'annule pas, de sorte que f/g est bien défini sur ce voisinage. (Pour un raisonnement analogue, voir la preuve de la règle de calcul de limite pour un quotient de suites, proposition 2.2.1 (iii).)

4.2.16 Proposition

Soit f définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$ et g définie dans un voisinage pointé I de $a \in \mathbb{R}$, tel que $g(I) \subset D(f) \setminus \{b\}$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = l,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = l.$$

Démonstration Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f \circ g) \setminus \{a\}$ telle que $x_n \rightarrow a$. Tout d'abord, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(g) \setminus \{a\}$ et $x_n \rightarrow a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$ et, d'autre part, $g(x_n) \rightarrow b$. Par conséquent, $(g(x_n))_{n \geq n_0} \subset g(I) \subset D(f) \setminus \{b\}$. Ainsi, par le théorème 4.2.5 appliquée à la fonction f au point b , on a bien que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = l.$$

On conclut en appliquant à nouveau le théorème 4.2.5, cette fois-ci à la fonction $f \circ g$ au point a . ♦

4.2.17 Remarque

Sans l'hypothèse que $g(I) \subset D(f) \setminus \{b\}$, on a le contre-exemple suivant. Considérons les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

et l'on voit donc que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$ n'existe pas.

4.2.18 Remarques

- (i) Les règles de calculs ci-dessus ne sont plus valables, en général, si l'une des deux limites l_1, l_2 est infinie. Dans le cas de limites infinies, on utilise ce qu'on appelle la *droite réelle achevée* qui est l'extension $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec les règles de calcul supplémentaires :

- $a + \infty = \infty$ et $a + (-\infty) = -\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$,
- $a \cdot \infty = \infty$ et $a \cdot (-\infty) = -\infty$, $\forall a > 0$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-(\infty) = -\infty$,
- $\frac{a}{\infty} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\forall a \geq 0$, et

$$a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq a < 1, \\ 1 & \text{si } a = 1, \\ \infty & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

En revanche, les opérations suivantes sont illicites :

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0.$$

On parle de *formes indéterminées* et on doit trouver, au cas par cas, une technique pour “lever l'indétermination”. Une méthode puissante pour lever les indéterminations du type $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sera présentée prochainement grâce au calcul intégral : la règle de Bernoulli-L'Hospital.

4.3 Fonctions continues

4.3.1 Définition

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de $a \in D(f)$.

On dit que f est *continue* en a si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 \leq |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

4.3.2 Remarque

Attention ! Dans la définition 4.3.1 (ii), le nombre positif $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ dépend à la fois de ε et du point a considéré.

4.3.3 Définition (*continuité à gauche, à droite*)

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un *voisinage à gauche* de $a \in D(f)$.

On dit que f est *continue à gauche* en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

On donne une définition analogue de la *continuité à droite* et on montre aisément que f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a .

4.3.4 Définition

Soit $E \subset D(f)$.

On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point $x \in E$.

On dit que f est continue sur $[a, b] \subset D(f)$ si f est continue sur (a, b) et si f est continue à droite en a et à gauche en b .

Finalement, on dit simplement que f est continue si f est continue sur $D(f)$.

Notation Si f est continue sur un intervalle $I \subset D(f)$, on écrit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$. Ainsi $C^0(I, \mathbb{R})$ désigne la *classe* des fonctions continues sur I . On dit que “ f est de classe c-zéro”.

4.3.5 Exemple

- (i) Il est trivial de prouver que $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition de continuité, en n’importe quel point $a \in \mathbb{R}$.
- (ii) Montrons que $g(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. On fixe $a \in \mathbb{R}$ arbitraire. Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que

$$|x^2 - a^2| = |x - a||x + a|.$$

Si $|x - a| < 1$, on déduit facilement que $|x + a| < 2|a| + 1$. En choisissant $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|a| + 1)\}$, on a alors

$$|x - a| < \delta \implies |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| < \delta(2|a| + 1) \leq \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}(2|a| + 1) = \varepsilon.$$

Ainsi, f est continue en a . Comme $a \in \mathbb{R}$ a été choisi arbitrairement, on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- (iii) Considérons maintenant la fonction $h(x) = x^3$. On va montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ en s’appuyant sur les points (i) et (ii).

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $x_n \rightarrow a$. Comme $x_n \rightarrow a$ et $x_n^2 \rightarrow a^2$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^3 - a^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a)(x_n^2 + x_n a + a^2) = 0.$$

Ainsi f est continue au point a . Comme $a \in \mathbb{R}$ a été choisi arbitrairement, on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4.3.6 Proposition (*opérations sur les fonctions continues*)

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D(g) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et soit $I \subset D(f) \cap D(g)$. On a alors :

- (i) $\alpha f + \beta g$ est continue sur I , $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (ii) fg est continue sur I .
- (iii) f/g est continue sur $I \setminus \{x \in D(f) \cap D(g) ; g(x) = 0\}$.
- (iv) Si g est continue en $a \in D(g)$ et f est continue en $b = g(a) \in D(f)$, alors $f \circ g$ est continue en $a \in D(f \circ g)$.

Démonstration En utilisant la définition 4.3.1 (i) de la continuité, le résultat découle des propositions 4.2.14 et 4.2.16. Concernant le point (iv), il convient ici de remarquer que la restriction $g(I) \subset D(f) \setminus \{b\}$ de la proposition 4.2.16 n'est plus nécessaire si la fonction f est continue au point b ; en effet la restriction $0 < |y - b|$ dans la définition de limite devient superflue. ♦

4.3.7 Nature des points de discontinuité

Au vu de la définition 4.3.1 (i), une fonction $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en $a \in \mathbb{R}$ si au moins l'une des trois conditions suivantes n'est pas vérifiée :

- (i) $a \in D(f)$.
- (ii) Les deux limites $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$ existent (dans $\mathbb{R}$) et sont égales.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si l'une des conditions (ii) ou (iii) n'est pas vérifiée, on dit alors que f est *discontinue* en a . Si f est discontinue en a mais que les deux limites sous (ii) existent, on dit que a est un point de *discontinuité de première espèce*. Si au moins l'une des deux limites sous (ii) est infinie ou n'existe pas, on dit que a est un point de *discontinuité de deuxième espèce* (ou *discontinuité essentielle*) de f .

Si $a \notin D(f)$ mais que (ii) est vérifiée (i.e. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est finie), on parle de *discontinuité apparente* et on fait la définition suivante :

4.3.8 Définition

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \notin D(f)$. Alors, si la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, on définit le *prolongement par continuité* de f par

$$\hat{f} : D(f) \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a. \end{cases}$$

Si un tel prolongement existe, il est unique et, par définition, continu. Dans le cas où le domaine de définition est de la forme $(a, b]$ (resp. $[b, a)$), remplacer la limite dans la définition ci-dessus par une limite à droite (resp. à gauche).

4.3.9 Exemple

La fonction donnée par $f(x) = \sin(x)/x$ est définie et continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et vérifie de plus

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

On peut ainsi définir son prolongement par continuité :

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \in \mathbb{R}^*, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

4.3.10 Remarque

Dans la définition 4.3.8, l'hypothèse que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe suppose implicitement que l'on puisse approcher a par des points de $D(f)$, i.e. qu'il existe une suite $(x_n) \subset D(f)$ telle que $x_n \rightarrow a$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On dit que a est un *point d'accumulation* de $D(f)$.

4.4 Fonctions continues sur un intervalle fermé

Les résultats présentés dans cette section sont assez naturels et intuitifs si on garde à l'esprit l'image simpliste suivante de la continuité d'une fonction : on peut tracer sa représentation graphique "sans lever le crayon".

Il faut pourtant remarquer que les deux théorèmes démontrés ci-dessous sont tout à fait non triviaux et font apparaître des propriétés profondes liées à la continuité.

4.4.1 Théorème du min-max

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son minimum et son maximum sur $[a, b]$, i.e.

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] \quad \text{tel que}$$

$$f(x_m) = m := \min\{f(x) ; x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad f(x_M) = M := \max\{f(x) ; x \in [a, b]\}.$$

Démonstration

— Etape 1 : Montrons tout d'abord que $\text{Im}(f) = f([a, b])$ est borné. Pour cela, il suffit de montrer que la fonction $|f|$ est bornée supérieurement sur $[a, b]$.

Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| \geq n$. On a ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = \infty$.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (2.4.4), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Posons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in [a, b].$$

Mais alors, par continuité de $|f|$ sur $[a, b]$, on a que $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = |f(\tilde{x})| < \infty$, d'où contradiction.

— Etape 2 : Soit $m := \inf f([a, b])$, $M := \sup f([a, b])$.

On déduit de l'étape 1 que $-\infty < m \leq M < \infty$.

Par définition du supremum, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in f([a, b])$ tel que

$$M - \frac{1}{n} \leq y_n \leq M. \quad (4.2)$$

En particulier, $y_n \rightarrow M$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'autre part, puisque $y_n \in f([a, b])$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. En utilisant à nouveau Bolzano-Weierstrass, on a une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} =: x_M$. Par continuité de f , on conclut que

$$f(x_M) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = M.$$

La démonstration est tout à fait analogue pour le min. ♦

4.4.2 Remarque

En général, il faut distinguer “inf” de “min” et “sup” de “max”. Considérons deux exemples pour illustrer cette remarque.

- (i) La fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, satisfait les hypothèses du théorème du min-max. Elle atteint donc son min et son max sur l'intervalle $[-1, 1]$:

$$\min_{x \in [-1, 1]} f(x) = \inf_{x \in [-1, 1]} f(x) = 0 = f(0), \quad \max_{x \in [-1, 1]} f(x) = \sup_{x \in [-1, 1]} f(x) = 1 = f(\pm 1).$$

- (ii) La fonction $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$, satisfait

$$\max_{x \in [1, \infty)} g(x) = \sup_{x \in [1, \infty)} g(x) = 1, \quad \inf_{x \in [1, \infty)} g(x) = 0.$$

Le max est atteint en $x = 1$. En revanche, l'inf n'est pas atteint, on a seulement que $\inf_{x \in [1, \infty)} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. Dans ce cas, $\inf_{x \in [1, \infty)} g(x) \notin \text{Im}(g)$ et g ne possède pas de minimum global. (Notez que la restriction de g à tout intervalle de la forme $[1, a]$ avec $a > 1$ atteint son minimum au point $x = a$.)

- (iii) La fonction $h : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 1/x$, est non-bornée et satisfait

$$\min_{x \in (0, 1]} h(x) = \inf_{x \in (0, 1]} h(x) = 1, \quad \sup_{x \in (0, 1]} h(x) = +\infty.$$

4.4.3 Théorème de la valeur intermédiaire

Pour $-\infty < a < b < \infty$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, posons

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Alors, pour tout $c \in [m, M]$, il existe $x_c \in [a, b]$ tel que $c = f(x_c)$.

Démonstration Si $m = M$, alors f est constante et le résultat est trivial. Supposons donc $m < M$. Si $c = m$ ou $c = M$, on utilise le théorème précédent. Supposons donc $c \in (m, M)$. Sans perte de généralité, on suppose également que $x_m < x_M$. Définissons maintenant l'ensemble

$$E_c := \{x \in [x_m, x_M] ; f(x) < c\}.$$

On remarque alors que $E_c \neq \emptyset$ car $x_m \in E_c$, et l'on pose¹ $x_c := \sup E_c \in [x_m, x_M]$. Nous allons prouver que $f(x_c) = c$.

Tout d'abord, par définition du supremum,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in E_c \quad \text{tel que} \quad x_c - \frac{1}{n} \leq y_n \leq x_c.$$

1. Si $x_M < x_m$, on peut poser $E_c := \{x \in [x_m, x_M] ; f(x) > c\}$ et $x_c := \sup E_c$. D'autres constructions sont aussi possibles.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_c$. Alors, puisque $f(y_n) < c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a que

$$f(x_c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq c, \quad (4.3)$$

par continuité de f . Puisque $f(x_M) = M > c$, on en déduit en particulier que $x_c < x_M$.

On définit maintenant $z_n := x_c + 1/n$. Comme $x_c < x_M$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $z_n \in (x_c, x_M]$, pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, par définition de x_c , $f(z_n) \geq c$ pour tout $n \geq n_0$. D'autre part, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_c$, la continuité de f implique

$$f(x_c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \geq c. \quad (4.4)$$

On conclut par (4.3) et (4.4) que $f(x_c) = c$. ♦

4.4.4 Remarque

- (i) Dans certains ouvrages, la conclusion du théorème 4.4.3 est énoncée sous la forme plus faible : pour tout c entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x_c \in [a, b]$ tel que $f(x_c) = c$. On dit d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (pas nécessairement continue) qui vérifie ceci qu'elle possède la "propriété de la valeur intermédiaire".
- (ii) Les deux théorèmes précédents impliquent le résultat important :

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Ainsi, **l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.**

4.5 Continuité uniforme

Nous introduisons dans cette section la notion de continuité uniforme qui va jouer un rôle important dans l'étude des suites de fonctions ainsi que dans la théorie de l'intégrale de Riemann qui sera présentée au chapitre 8.

4.5.1 Définition

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in D(f) \text{ et } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4.5.2 Remarques

- (i) La notion de continuité uniforme n'a de sens que sur tout le domaine de définition de la fonction (ou sur un sous-ensemble de celui-ci, typiquement un intervalle), alors que la continuité est définie ponctuellement.
- (ii) Dans la définition ci-dessus, δ ne dépend ni de x , ni de y , mais uniquement de ε . C'est donc une propriété plus forte que la continuité. En particulier, la continuité uniforme implique la continuité sur $D(f)$.

La proposition suivante est très utile pour étudier la continuité uniforme.

4.5.3 Proposition

La fonction $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f)$,

$$|x_n - y_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \implies \quad |f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.5)$$

Démonstration Supposons f uniformément continue et considérons deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f)$ telles que $|x_n - y_n| \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité uniforme de f donne un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$x, y \in D(f), |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Comme $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - y_n| < \delta$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On conclut que $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$.

Réciproquement, supposons par contraposition que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ avec la propriété suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in D(f)$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

On a donc deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(f)$ qui enfreignent (4.5). ♦

4.5.4 Exemples

- (i) Montrons que la fonction $f(x) = x$ est uniformément continue sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on a immédiatement que

$$x, y \in I \text{ et } |x - y| < \delta := \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon,$$

quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ considéré.

- (ii) Considérons à présent la fonction $f(x) = \sin(x)$. On va montrer qu'elle est aussi uniformément continue sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On remarque que

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(y)| &= 2 \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \frac{1}{2} |x - y| = |x - y|. \end{aligned}$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc à nouveau prendre $\delta = \varepsilon$, de sorte que

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| < \delta = \varepsilon, \quad \forall x, y \in I,$$

quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ considéré.

- (iii) Nous allons montrer maintenant que $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, n'est pas uniformément continue bien que la fonction soit continue sur $(0, \infty)$. (Noter la dépendance en a dans le δ obtenu à l'exemple 4.3.5 (ii).)

Pour $n \geq 1$, choisissons $x_n = n$, $y_n = n + 1/2n$. On a alors $x_n, y_n \in D(f)$, $|x_n - y_n| = 1/2n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. D'autre part,

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= |x_n^2 - y_n^2| = |x_n - y_n||x_n + y_n| \\ &= \left| n - n - \frac{1}{2n} \right| \left| n + n + \frac{1}{2n} \right| \\ &= 1 + \frac{1}{4n^2} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

On déduit donc de la proposition 4.5.3 que f n'est pas uniformément continue.

4.5.5 Théorème de la continuité uniforme

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ telles que $|x_n - y_n| \rightarrow 0$. Nous allons montrer que $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une sous-suite d'indices $k \mapsto n_k$ tels que

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Nous considérons maintenant les sous-suites $(x_{n_k}), (y_{n_k}) \subset [a, b]$. Par Bolzano-Weierstrass, chacune admet une sous-suite convergente. On peut donc extraire une sous-suite d'indices, que nous notons encore $k \mapsto n_k$ pour simplifier, telle que $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ convergent. Puisque $|x_{n_k} - y_{n_k}| \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, (x_{n_k}) et (y_{n_k}) doivent avoir la même limite $l \in [a, b]$. Alors la continuité de f et de la fonction $z \mapsto |z|$ impliquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(l) - f(l)| = 0,$$

ce qui contredit (4.6) et termine la preuve. ♦

4.5.6 Exemples

Pour se convaincre de la nécessité d'avoir un intervalle fermé borné dans les hypothèses du théorème de la continuité uniforme, considérons la fonction $f(x) = 1/x$. Nous allons montrer (i) qu'elle est uniformément continue sur $(1, \infty)$ mais (ii) qu'elle ne l'est pas sur $(0, 1)$, bien qu'elle soit continue sur ces deux intervalles.

- (i) Pour tout $x, y \in (1, \infty)$, on a

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x - y}{xy} \right| < |x - y|.$$

Il suffit donc de prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition de la continuité uniforme pour conclure.

(ii) En revanche, sur $(0, 1)$, un tel raisonnement n'est plus possible.

Pour $n \geq 1$, choisissons $x_n = 1/n$, $y_n = 1/2n$. Alors $|x_n - y_n| < 1/n \rightarrow 0$ et

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - 2n| = n \geq 1.$$

On déduit donc de la proposition 4.5.3 que f n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$.

Pour conclure ce chapitre, nous donnons une autre démonstration du théorème basée sur le lemme suivant.

4.5.7 Lemme (*Heine-Borel-Lebesgue*)

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et $\mathcal{F}$ une famille de d'intervalles ouverts tels que

$$[a, b] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I.$$

Alors il existe une famille finie $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ telle que

$$[a, b] \subset \bigcup_{I \in \tilde{\mathcal{F}}} I.$$

Démonstration Soit E l'ensemble des nombres $x \in [a, b]$ pour lesquels il existe une famille finie $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{F}$ telle que

$$[a, x] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}(x)} I.$$

L'ensemble E n'est pas vide puisqu'il contient a . De plus, si $x \in E$, on a $y \in E$ pour tout $a \leq y \leq x$. En effet, il suffit de prendre $\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x)$. En d'autres termes, $x \in E \Rightarrow [a, x] \subset E$. On voit donc que E est un intervalle de la forme $[a, M)$ ou $[a, M]$, où $M := \sup E \leq b$. Il suffit donc de montrer que $M = b$ et $M \in E$.

Premièrement, supposons par l'absurde que $M < b$. Puisque $M \in [a, b]$, il existe un intervalle ouvert $I_0 \in \mathcal{F}$ tel que $M \in I_0$. Notons-le (α, β) et posons $\gamma = \min\{b, \beta\}$. Puisque $(M + \alpha)/2 \in E$, on a une famille finie $\mathcal{F}((M + \alpha)/2) \subset \mathcal{F}$ telle que

$$[a, (M + \alpha)/2] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}((M + \alpha)/2)} I.$$

Par construction, $(M + \gamma)/2 \in (M, b)$. En posant $\mathcal{F}((M + \gamma)/2) := \mathcal{F}((M + \alpha)/2) \cup I_0$, on a que

$$[a, (M + \gamma)/2] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}((M + \gamma)/2)} I.$$

Ainsi, $(M + \gamma)/2 \in E$, ce qui contredit le fait que $(M + \gamma)/2 > M$. Donc $M = b$.

En réutilisant l'argument ci-dessus, on a maintenant $b \in I_0 = (\alpha, \beta)$. Mais alors $\mathcal{F}(b) := \mathcal{F}((b + \alpha)/2) \cup I_0 \subset \mathcal{F}$ est une famille finie telle que

$$[a, b] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}(b)} I,$$

d'où $b \in E$. ♦

4.5.8 Remarques

- (i) L'hypothèse du lemme que l'intervalle soit fermé aux deux extrémités est essentielle. On a par exemple

$$[0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(-\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n} \right),$$

mais on ne peut pas trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$[0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} \left(-\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{n} \right)$$

car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe toujours un x entre $1 - 1/n$ et 1.

- (ii) Le lemme s'applique même aux situations où la famille $\mathcal{F}$ est *non dénombrable*, comme on le verra dans la démonstration du théorème de la continuité uniforme ci-dessous et dans celle du théorème de Dini (6.2.2).
- (iii) On dit que $\mathcal{F}$ est un *recouvrement* de $[a, b]$ et que $\tilde{\mathcal{F}}$ est un *sous-recouvrement*.
- (iv) La propriété des intervalles fermés donnée par le lemme, i.e. la possibilité d'extraire de **tout** recouvrement un sous-recouvrement fini, est appelée *propriété de Heine-Borel* dans le cadre des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Dans la théorie des espaces topologiques, cette propriété est la définition générale d'un *espace compact*. La notion d'ensemble compact dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ sera introduite au cours d'Analyse II, dans le cadre de l'étude des fonctions de plusieurs variables.
- (v) On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est *fermé* ssi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $x_n \rightarrow x$ impliquent $x \in E$. Vous vous convaincrez aisément qu'un intervalle fermé est un ensemble fermé.
- (vi) On peut démontrer que $E \subset \mathbb{R}$ vérifie la propriété de Heine-Borel ssi E est fermé et borné. En d'autres termes, **les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont précisément les sous-ensembles fermés et bornés.**

Une autre démonstration du théorème de la continuité uniforme

Notons $B(x, \delta(x))$ l'intervalle ouvert $(x - \delta(x), x + \delta(x))$, $0 < \delta(x) < \infty$, et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue sur $[a, b]$, pour chaque élément $x \in [a, b]$, il existe un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$y \in [a, b] \cap B(x, \delta(x)) \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, la famille $\{B(x, \frac{1}{2}\delta(x)); x \in [a, b]\}$ constitue clairement un recouvrement de $[a, b]$. Par le lemme précédent, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $\{B(x_i, \frac{1}{2}\delta(x_i)); i \in \{1, \dots, n\}\}$. Posons alors $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta(x_i); i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Prenons maintenant $y, z \in [a, b]$ tels que $|y - z| < \delta$. Il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $y \in B(x_k, \frac{1}{2}\delta(x_k))$ et donc, puisque

$$|z - x_k| = |(z - y) + (y - x_k)| \leq |z - y| + |y - x_k| < \delta(x_k)$$

par définition de δ , on a que $z \in B(x_k, \delta(x_k))$. Par suite, il vient donc

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d'où la continuité uniforme de f . ♦

4.5.9 Remarques

- (i) De manière générale, on appelle *boule ouverte de centre a et rayon r* l'intervalle ouvert $B(a, r) = (a - r, a + r)$. Cette terminologie prendra toute sa saveur dans l'espace à plusieurs dimensions au cours d'Analyse II.
- (ii) Notez ici l'importance dans la démonstration de la finitude du sous-recouvrement extrait par le lemme de Heine-Borel-Lebesgue. En effet, en prenant le minimum d'un ensemble fini de nombres positifs, on est assuré que δ soit positif, ce qui ne serait pas forcément le cas pour un ensemble infini, même dénombrable. Ce minimum pourrait être nul.

Chapitre 5

Calcul différentiel

Ce chapitre est consacré à l'introduction de la notion de dérivée et à la démonstration des principaux résultats du calcul différentiel à une variable.

Nous commençons par définir précisément la dérivée d'une fonction, donnons les règles de calcul des dérivées, puis nous développons les outils nécessaires à l'étude des fonctions continues (croissance, convexité, recherche des extrema, etc.).

5.1 Définitions et règles de calcul

5.1.1 Définition

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D(f)$ un *point intérieur* à $D(f)$, i.e. il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I \subset D(f)$.

On définit alors la *dérivée* de f au point a , notée $f'(a)$, comme étant le nombre

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pour autant que la limite existe. On dit que f est *dérivable* en $a \in D(f)$, ou encore que f est *différentiable* en $a \in D(f)$ si la dérivée de f au point a existe.

On parle souvent de *rapport de Newton* ou encore de *rapport des accroissements* concernant la fraction qui figure dans la limite ci-dessus.

On appelle aussi $f'(a) \in \mathbb{R}$ le *nombre dérivé* de f au point a .

5.1.2 Remarques

- (i) Noter que, tout comme la continuité en un point, la définition ci-dessus est ponctuelle. L'existence de la dérivée est donc une *propriété locale* de f .
- (ii) **Définitions alternatives** Grâce aux propriétés des limites, on a les deux définitions alternatives suivantes :

- Posant dans la définition ci-dessus $x = a + h$, on a que la dérivée $f'(a)$ est donnée par

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

pour autant que la limite existe.

- La seconde définition alternative est très importante car c'est celle qui se prête le mieux à la généralisation de la notion de dérivée à celle de *différentielle* dans des espaces de dimension supérieure. En écrivant

$$f(a+h) = f(a) + ch + r(a, h), \quad (5.1)$$

où $r(a, \cdot)$ est une fonction de h dépendant du point a , on va avoir que la limite $f'(a)$ existe si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(a, h)}{h} = 0. \quad (5.2)$$

Dans ce cas, on obtient en effet

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch + r(a, h)}{h} = c.$$

On parle d'*approximation linéaire* de f au point a pour une expression du type (5.1) et on appelle *reste* la fonction $r(a, \cdot)$. Pour toute fonction $r(a, \cdot)$ satisfaisant (5.2), on écrit $r(a, h) = o(h)$ et on dit que “ r est un petit o de h ” ou encore que “ r est négligeable devant h ” lorsque $h \rightarrow 0$. Le fait que r soit négligeable devant h signifie que $f(a) + ch$ est une bonne approximation de $f(a+h)$ lorsque $|h|$ est petit. Le nombre $c = f'(a)$ qui détermine de façon unique cette approximation linéaire est appelé *différentielle* de f au point a .

- (iii) **Notation** Ecrivant $y(x) = f(x)$, on a pour la dérivée de f au point a les notations équivalentes :

$$f'(a) \equiv \frac{df}{dx}(a) \equiv y'(a) \equiv Df(a) \equiv \dot{f}(a).$$

La notation $\dot{f}(a)$ est traditionnellement utilisée par les physiciens pour désigner la dérivée d'une fonction dépendant du temps.

- (iv) **Interprétation géométrique** Dans l'expression (5.1), on distingue le reste $r(a, h)$ et la *linéarisation* de f en a ,

$$f_{\text{lin}}(x) := f(a) + f'(a)(x - a),$$

dont le graphe est la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$. Cette droite du plan est représentée par son équation cartésienne

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Ainsi, le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de cette tangente.

- (v) On remarque que si f est dérivable en $a \in D(f)$, alors elle est nécessairement continue en a . En effet, si ça n'était pas le cas, la limite du rapport de Newton ne serait pas une forme indéterminée du type $0/0$, le numérateur ne tendant pas vers 0 lorsque $x \rightarrow a$, et ainsi elle ne saurait exister.

La réciproque est fausse comme le montre par exemple la fonction $f(x) = |x|$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas dérivable en 0.

5.1.3 Définition

- (i) On définit la *dérivée à gauche* $f'(a^-)$ et la *dérivée à droite* $f'(a^+)$ par

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Bien entendu, $f'(a)$ existe si et seulement si $f'(a^\pm)$ existent et sont égales, auquel cas $f'(a) = f'(a^\pm)$.

- (ii) Définissons à partir de f une nouvelle fonction, appelée *fonction dérivée* et notée f' , par

$$f' : D(f') \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x),$$

où

$$D(f') = \{x \in D(f) ; f'(x) \text{ existe}\} \subset D(f).$$

On peut ainsi définir successivement la *dérivée seconde* $f'' \equiv (f')'$, la *dérivée troisième* $f''' \equiv (f'')'$, etc. On a alors les notations équivalentes :

$$f''(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}(x), \quad f'''(x) \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}(x), \quad \text{etc.}$$

De façon générale, on notera

$$f^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pour la n -ième dérivée de f , avec la convention que $f^{(0)} = f$.

On a alors $D(f^n) \subset D(f^{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

- (iii) Comme pour la continuité, on étend la définition ponctuelle que nous avons donnée de la dérivée en disant que f est dérivable sur $(a, b) \subset D(f)$ si f est dérivable en tout point de (a, b) , de même pour les intervalles fermés $[a, b] \subset D(f)$ si f est de plus dérivable à droite en a et à gauche en b .

Si la n -ième dérivée de f est continue sur un intervalle $I \subset D(f)$, on écrit $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ et on dit que “ f est de classe C^n sur I ”. Si c’est le cas pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. On verra bientôt que les classes de fonctions $C^n(I, \mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels. Etant entendu que les fonctions sont à valeurs réelles, on écrira aussi simplement $C^n(I, \mathbb{R}) \equiv C^n(I)$.

5.1.4 Remarque

En utilisant la règle de Bernoulli-L’Hospital (c.f. paragraphes 5.4.3-5.4.4) on montre que, si f est dérivable dans un voisinage pointé à gauche de a alors la dérivée à gauche $f'(a^-)$ coïncide avec la limite $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$. Ainsi, la notation pour la dérivée à gauche est cohérente avec la notation introduite au paragraphe 4.2.9. On a de même que $f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ si f est dérivable dans un voisinage pointé à droite de a .

5.1.5 Exemples

- (i) Considérons la fonction puissance $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1, \quad \forall x, a \in \mathbb{R},$$

d'où $f' \equiv 1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \geq 2$, posant $x = a + h$, $a \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{1}{h} [(a + h)^n - a^n] \\ &= \frac{1}{h} \left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} h + \dots + h^n - a^n \right] \\ &= \left[na^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right], \end{aligned}$$

et ainsi

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[na^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right] = na^{n-1}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Un calcul analogue montre que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^n} \right) = -nx^{-(n+1)}, \quad \forall x \neq 0, \quad n \geq 1.$$

- (iii) Calculons maintenant la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Le rapport de Newton de la fonction au point $x \in \mathbb{R}$ est donné par

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [f(x + h) - f(x)] &= \frac{1}{h} [\sin(x + h) - \sin(x)] \\ &= \frac{1}{h} 2 \sin \left(\frac{h}{2} \right) \cos \left(\frac{2x + h}{2} \right) \\ &= \frac{\sin \left(\frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \longrightarrow \cos(x) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Donc $\sin'(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On montre de façon analogue que $\cos'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5.1.6 Proposition (*Règles de calcul*)

Soit f et g deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$. On a alors les règles de calcul suivantes :

- (i) $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (linéarité).
- (ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (formule de Leibniz).
- (iii) $\left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ si $g(a) \neq 0$.

- (iv) Supposons maintenant que g est dérivable en a et que f est dérivable en $b = g(a)$.
La dérivée de la fonction composée $f \circ g$ est alors donnée par

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a) \quad (\text{règle de la chaîne}).$$

Démonstration

- (i) Appliquer les règles de calculs pour les limites.
(ii) Pour $h \in \mathbb{R}$ tel que f et g soient définies entre a et $a + h$ on va avoir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}[f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)] \\ &= \frac{1}{h}[f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)] \\ &= \frac{[f(a+h) - f(a)]g(a+h)}{h} + \frac{f(a)[g(a+h) - g(a)]}{h} \\ &\longrightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

- (iii) Avec les mêmes hypothèses pour h on a que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right] \\ &= \frac{1}{h} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{g(a+h)g(a)} + \frac{1}{h} \frac{f(a)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)} \\ &\longrightarrow \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

- (iv) Avec $b = g(a)$,

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + o(h) = b + k(h), \quad k(h) := g'(a)h + o(h),$$

et

$$f(b+k) = f(b) + f'(b)k + o(k).$$

En d'autres termes, il existe une fonction $r(k)$, définie au voisinage de $k = 0$ et satisfaisant $r(k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow 0$, telle que

$$f(b+k) = f(b) + f'(b)k + kr(k).$$

De plus, on remarque que $k(h)/h \rightarrow g'(a)$ quand $h \rightarrow 0$, d'où en particulier $k(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Notez que dans le cas où $g'(a) = 0$, on peut avoir $k(h) = 0$ au voisinage de $h = 0$. Néanmoins, en prolongeant si nécessaire r par continuité en $k = 0$, on obtient que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(g(a+h)) - f(b)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f'(b)k(h) + k(h)r(k(h)))] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f'(b)g'(a)h + f'(b)o(h) + k(h)r(k(h)))] \\ &= f'(b)g'(a) + f'(b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} r(k(h)) \frac{k(h)}{h} = f'(b)g'(a). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

5.1.7 Remarque

Il découle du point (i) de la proposition précédente que les classes de fonctions $C^n(I, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, sont des espaces vectoriels. Ils font partie des exemples les plus élémentaires d'espaces fonctionnels.

5.1.8 Exemples

(i) Considérons une fonction polynomiale

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0, \quad D(P) = \mathbb{R}.$$

Clairement $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$ et $P \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(ii) En appliquant à nouveau la règle de dérivation d'un quotient, on trouve pour la fonction

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

$$D(\tan) = \{x \in \mathbb{R}; \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2, \quad D(\tan') = D(\tan). \end{aligned}$$

(iii) Considérons maintenant la fonction $h(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$. On remarque que $h = f \circ g$, avec $g(x) = 1/x$, $f(y) = \sin(y)$. Donc

$$h'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \neq 0.$$

(iv) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$|f(x) - f(0)| = |x^2 \sin(1/x)| \leq x^2.$$

Puisque $x^2 \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), on déduit que f est continue en 0. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour la dérivée, on obtient en tout point $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 h'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{par (iv)}).$$

Pour $x = 0$, on calcule

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \end{aligned}$$

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, on voit que f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. En revanche,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{n'existe pas.} \end{aligned}$$

Donc f' n'est pas continue en 0. Ainsi, $f \in C^0(\mathbb{R})$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

5.1.9 Dérivée de la fonction inverse

Soit $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Supposons qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset D(f)$ tel que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Comme $f : D(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ est bijective, on a pour tout $x \in D(f)$ la relation $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. En dérivant les deux membres de cette identité et en appliquant la règle de la chaîne, il vient

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \implies (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall x \in I.$$

Alors, pour tout $y \in f(I)$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$, et on obtient

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad \forall y \in f(I). \quad (5.3)$$

5.1.10 Exemples

- (i) Soit $f(x) = x^n$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $f'(x) = nx^{n-1}$. D'autre part, $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$, pour tout $y > 0$. En appliquant la relation (5.3), on obtient

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{n((f^{-1}(y)))^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}.$$

- (ii) Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. En utilisant le résultat précédent, on a

$$\begin{aligned} (x^{p/q})' &= [(x^{1/q})^p]' = p(x^{1/q})^{p-1}(x^{1/q})' \\ &= p(x^{1/q})^{p-1} \frac{1}{q} x^{1/q-1} = \frac{p}{q} x^{p/q-1/q+1/q-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{p/q-1}, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

On conclut que $(x^r)' = rx^{r-1}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $x > 0$.

- (iii) La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective. Sa fonction inverse s'appelle arcsinus et est notée $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il est très utile d'apprendre par cœur la phrase suivante :

$\arcsin(y)$ est l'unique nombre appartenant à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut y .

Notant $y = \sin(x)$, on obtient

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \stackrel{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \forall y \in (-1, 1).$$

Ainsi $D(\arcsin') = (-1, 1)$ et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

- (iv) La fonction $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour inverse la fonction arctangente et notée $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\arctan(y)$ est l'unique nombre appartenant à $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dont la tangente vaut y .

Pour $y = \tan(x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, on va avoir

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan(x)^2} = \frac{1}{1 + y^2},$$

d'où $D(\arctan') = \mathbb{R}$ et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.2 Théorèmes des accroissements finis

Nous présentons dans cette section les théorèmes de Rolle et des accroissements finis qui s'avéreront déterminants dans l'étude des fonctions à l'aide de la notion de dérivée.

5.2.1 Théorème de Rolle

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $\tilde{x} \in (a, b)$ tel que $f'(\tilde{x}) = 0$.

Démonstration Le théorème 4.4.1 (min-max) nous assure l'existence de deux points $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M, \quad \forall x \in [a, b].$$

En particulier on a $m \leq f(a) = f(b) \leq M$.

Si $m = M$, f est constante sur $[a, b]$ et sa dérivée est nulle en tout point de (a, b) . Supposons donc $m \neq M$. Alors au moins l'un des deux nombres n'est pas égal à $f(a) = f(b)$. Supposons sans perte de généralité que $M \neq f(a)$. Alors $a < x_M < b$ et on a que $f(x) - f(x_M) \leq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Ainsi,

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } a < x < x_M, \\ \leq 0 & \text{si } x_M < x < b. \end{cases}$$

On conclut que $f'(x_M^-) \geq 0$ et $f'(x_M^+) \leq 0$. Puisque f est dérivable au point x_M , on obtient donc $f'(x_M) = 0$. ♦

5.2.2 Remarques

- (i) On peut démontrer de même que $f'(x_m) = 0$ si le min est atteint en un point intérieur à $[a, b]$. La démonstration est constructive et montre donc que si le min et/ou le max sont atteints en des points intérieurs à $[a, b]$, la dérivée s'annule en ces points (voir aussi la proposition 5.2.9 ci-dessous).
- (ii) Pour que le théorème s'applique, il est nécessaire que f soit dérivable sur tout l'intervalle (a, b) . Par exemple, la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ satisfait toutes les hypothèses du théorème sauf qu'elle n'est pas dérivable en 0 et elle n'admet aucun point $\tilde{x} \in (-1, 1)$ tel que $f'(\tilde{x}) = 0$.
- (iii) On appelle **point critique** de f un point $\tilde{x}$ tel que $f'(\tilde{x}) = 0$.

5.2.3 Théorème des accroissements finis généralisé

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, et dérivables sur (a, b) . Alors il existe un point $\tilde{x} \in (a, b)$ tel que

$$[f(b) - f(a)]g'(\tilde{x}) = [g(b) - g(a)]f'(\tilde{x}).$$

Démonstration Si on pose

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x),$$

alors h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b).$$

La fonction h satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle et ainsi il existe $\tilde{x} \in (a, b)$ tel que $h'(\tilde{x}) = 0$, ce qui donne le résultat. ♦

5.2.4 Corollaire (*Théorème des accroissements finis*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) . Alors il existe un point $\tilde{x} \in (a, b)$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\tilde{x}).$$

Démonstration Appliquer le théorème précédent à la fonction $g(x) = x$. ♦

On se référera souvent à ce résultat par l'acronyme "TAF".

5.2.5 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f une fonction dérivable sur (a, b) .

- (i) f est croissante ssi $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.
- (ii) f est décroissante ssi $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.
- (iii) f est constante ssi $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a, b)$.

Démonstration Ces résultats se démontrent aisément en utilisant le TAF : pour tout couple de nombres $x_1, x_2 \in (a, b)$, il existe $\tilde{x}$ entre x_1 et x_2 tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\tilde{x}). \quad \blacklozenge$$

5.2.6 Définition

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$. S'il existe une constante positive L telle que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in D(f),$$

on dit alors que f est *lipschitzienne* (ou *L-lipschitzienne*).

5.2.7 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, avec $M = \sup_{x \in (a, b)} |f'(x)| < \infty$.

Alors f est M -lipschitzienne sur (a, b) .

Démonstration Pour $a < x_1 < x_2 < b$, le théorème des accroissements finis nous assure l'existence d'un point $\tilde{x} \in (x_1, x_2)$ tel que

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(\tilde{x}).$$

Ainsi,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b),$$

et donc f est bien M -lipschitzienne. ♦

Attention ! La réciproque est fautive ; considérer par exemple une fonction affine par morceaux.

5.2.8 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, avec $\sup_{x \in (a, b)} |f'(x)| < \infty$. Alors f est uniformément continue sur (a, b) .

Démonstration Exercice facile utilisant la proposition 5.2.7 ♦

Attention ! La réciproque est fausse. En effet, la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $(0, 1)$ (pourquoi ?), mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

5.2.9 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $\tilde{x} \in (a, b)$ est un point d'extremum local pour f et que f est dérivable en ce point, alors $f'(\tilde{x}) = 0$.

Démonstration En restreignant f à un petit intervalle dans lequel $\tilde{x}$ est un point de maximum (ou de minimum) global, on peut alors simplement répéter la preuve du théorème de Rolle. ♦

Attention ! La réciproque est fausse. Considérer par exemple la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $[-1, 1]$. On a $f'(0) = 0$ bien que 0 ne soit évidemment pas un point d'extremum local.

En revanche, il est clair que si $f' > 0$ dans un voisinage à gauche de a et $f' < 0$ dans un voisinage à droite de a , alors a est un point de maximum local de f , cela même si f n'est pas dérivable au point a .

Nous donnons les conclusions de ce qui précède dans la proposition suivante qui décrit la nature des points d'extremum sur un intervalle fermé borné.

5.2.10 Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors les points où f atteint ses extrema (globaux) sont dans l'un des sous-ensembles de $[a, b]$ suivants :

- les bornes a, b ,
- les points critiques : $x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$,
- les points où la fonction n'est pas dérivable.

5.2.11 Exemples

(i) Pour la fonction $f(x) = |x|$ définie sur $[-1, 1]$, on a que

$$\min_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = 0 = f(0) \quad (\text{point où } f \text{ n'est pas dérivable}),$$

et

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = 1 = f(-1) = f(1) \quad (\text{bornes du domaine}).$$

(ii) En revanche, pour $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ sur l'intervalle $[-1, 2]$, on résoud

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x \in \{\pm 1\}.$$

Les points de min/max (local ou global) sont donc à chercher dans l'ensemble $\{-1, 1, 2\} \subset [-1, 2]$. On trouve que

$$\min_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = -\frac{2}{3} = f(1) \quad (x = 1 \text{ point critique})$$

et

$$\max_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = \frac{2}{3} = f(-1) = f(2)$$

($x = -1$ point critique et borne du domaine, $x = 2$ borne du domaine).

5.3 Fonctions convexes

5.3.1 Définition

Soit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$ et $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est *convexe* ssi pour tout couple de nombres $x_1, x_2 \in (a, b)$, on a :

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (5.4)$$

On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe.

5.3.2 Remarque

En représentation graphique, la condition (5.4) signifie que pour $x_1 \leq t \leq x_2$, le point $(t, f(t))$ est situé au-dessous de ou sur la droite joignant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. En effet, tout point $t \in (x_1, x_2)$ s'écrit $t = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ pour un unique $\lambda \in (0, 1)$, et la représentation paramétrique associée de la droite par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5.3.3 Lemme

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout $a < x_1 < x_2 < b$, on a

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t}, \quad \forall x_1 < t < x_2. \quad (5.5)$$

Démonstration On utilise la paramétrisation $t = t(\lambda) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ et on procède en deux temps. Premièrement, pour montrer que (5.4) $\Rightarrow$ (5.5), on montre que

$$\frac{f(t(\lambda)) - f(x_1)}{t(\lambda) - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(t(\lambda))}{x_2 - t(\lambda)}. \quad (5.6)$$

Réciproquement, (5.5) $\Rightarrow$ (5.4) s'obtient directement en posant $t = t(\lambda)$ dans (5.5). $\blacklozenge$

5.3.4 Théorème

Soit $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. On a alors les propriétés suivantes :

- (i) Si f est convexe, alors elle est continue en tout point $x_0 \in (a, b)$.
- (ii) Si f est dérivable sur (a, b) , alors elle est convexe si et seulement si la fonction dérivée f' est croissante sur (a, b) .
- (iii) Si f est deux fois dérivable sur (a, b) , alors elle est convexe si et seulement si la dérivée seconde f'' est positive sur (a, b) .

Démonstration

- (i) Nous donnons tout d'abord l'interprétation géométrique de la preuve. Nous encourageons le lecteur à la représenter graphiquement. Soit $x_0 \in (a, b)$ et s, t tels que $a < s < x_0 < t < b$. Au voisinage du point x_0 , le graphe de f est compris dans la région du plan limitée par les droites d_s passant par $(s, f(s))$ et $(x_0, f(x_0))$, et d_t passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(t, f(t))$, d'équations cartésiennes

$$d_s : y = f(x_0) + m_s(x - x_0) \quad \text{et} \quad d_t : y = f(x_0) + m_t(x - x_0),$$

respectivement données par les pentes

$$m_s := \frac{f(x_0) - f(s)}{x_0 - s} \quad \text{et} \quad m_t := \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}.$$

On a en effet, pour $s < x < x_0$,

$$f(x_0) + m_t(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m_s(x - x_0).$$

La première inégalité découle de (5.5) (en remplaçant respectivement x_1, t, x_2 par x, x_0, t) et la seconde de (5.4) (cf. remarque 5.3.2). On en déduit que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ par le théorème des deux gendarmes.

De façon analogue, pour $x_0 < x < t$,

$$f(x_0) + m_s(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + m_t(x - x_0),$$

d'où $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. Ainsi, f est bien continue en x_0 .

- (ii) Soit $a < x_1 < t < x_2 < b$. Supposons que f est convexe. En laissant $\lambda \rightarrow 0$, respectivement $\lambda \rightarrow 1$, dans les inégalités (5.6), on obtient

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

donc f' est bien croissante. Réciproquement, supposons que f' est croissante. Par le TAF, il existe $\tilde{x}_1 \in (x_1, t)$ et $\tilde{x}_2 \in (x_2, t)$ tels que

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} = f'(\tilde{x}_1) \leq f'(\tilde{x}_2) = \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t},$$

d'où la convexité de f .

- (iii) Si f est deux fois dérivable, on a que

$$f'' \geq 0 \iff f' \text{ croissante} \iff f \text{ convexe},$$

par le point (ii) et la proposition 5.2.5 (i). ♦

5.3.5 Exemple

La lectrice montrera aisément que les fonctions x^2 et e^x sont convexes sur $\mathbb{R}$, et que x^3 est convexe sur $(0, \infty)$ et concave sur $(-\infty, 0)$.

Les deux prochaines sections sont consacrées au développement d'outils pour le calcul de limites et l'étude locale des fonctions dérivables.

5.4 La règle de Bernoulli-l'Hospital

5.4.1 Théorème

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soient f, g deux fonctions dérivables sur (a, b) telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$ et

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (x \rightarrow a). \quad (5.7)$$

Alors si

$$f(x) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad g(x) \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow a), \quad (5.8)$$

ou si

$$g(x) \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow a), \quad (5.9)$$

on a que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow l \quad (x \rightarrow a). \quad (5.10)$$

Démonstration Supposons pour commencer que $-\infty \leq l < \infty$. Choisissons d'abord un réel r tel que $l < r$ puis s tel que $l < s < r$. De (5.7), on déduit que l'on peut trouver un point $c \in (a, b)$ tel que $a < x < c$ implique

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < s.$$

De plus, si $a < x < y < c$, le théorème des accroissements finis montre qu'il existe un point $t \in (x, y)$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < s. \quad (5.11)$$

Supposons que (5.8) soit vérifié. Faisant $x \rightarrow a$ dans (5.11), on voit que

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq s < r \quad (a < y < c). \quad (5.12)$$

Supposons maintenant que c'est (5.9) qui est vrai. En fixant y dans (5.11), on peut choisir un point $c_1 \in (a, y)$ tel que $g(x) > g(y)$ et $g(x) > 0$ si $a < x < c_1$. En multipliant les deux membres de (5.11) par $[g(x) - g(y)]/g(x)$, on obtient

$$\frac{f(x)}{g(x)} < s - s \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}. \quad (5.13)$$

Si l'on fait tendre x vers a dans (5.13), on voit d'après (5.9) que l'on peut trouver $c_2 \in (a, c_1)$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r \quad (a < x < c_2). \quad (5.14)$$

En résumé, (5.12) et (5.14) montrent que pour tout réel r tel que $l < r$, il existe un point c_2 tel que $f(x)/g(x) < r$ si $a < x < c_2$.

De la même manière, si $-\infty < l \leq \infty$, et r' étant cette fois choisi tel que $r' < l$, on peut trouver un point c_3 tel que $r' < f(x)/g(x)$ si $a < x < c_3$, et (5.10) découle de ces deux relations. ♦

5.4.2 Remarques

- (i) On obtient bien sûr la même conclusion pour $x \rightarrow b$ ou si l'on suppose dans (5.9) que $g(x)$ tend vers $-\infty$.
- (ii) La règle de Bernoulli-l'Hospital (BH) est un outil puissant pour lever des indéterminations du type $0/0$ ou ∞/∞ .

On voit souvent la règle de Bernoulli-l'Hospital énoncée dans ses différentes variantes sous la forme des deux corollaires suivants.

5.4.3 Corollaire

Soit f, g deux fonctions dérivables dans un voisinage pointé de $x_0 \in \mathbb{R}$, qui satisfont $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans ce voisinage et :
soit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}},$$

on a que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Démonstration On applique simplement le théorème 5.4 pour calculer les limites à gauche et à droite de x_0 . ♦

5.4.4 Remarque

Si f et g sont dérivables dans un voisinage pointé à gauche (resp. à droite) de x_0 , le résultat reste vrai en remplaçant partout $x \rightarrow x_0$ par $x \rightarrow x_0^-$ (resp. $x \rightarrow x_0^+$).

5.4.5 Corollaire

Soit f, g deux fonctions dérivables dans un voisinage de $+\infty$, telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans ce voisinage et :
soit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty.$$

Alors si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}},$$

on a que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

On a bien sûr un résultat analogue pour les limites en $-\infty$.

Démonstration On remarque que les fonctions

$$\tilde{f}(x) := f(1/x) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(x) := g(1/x)$$

sont définies dans un voisinage à droite de $x = 0$ et satisfont :
soit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{g}(x) = 0,$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{g}(x) = \pm\infty.$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l.$$

Le résultat découle donc du théorème 5.4. ♦

5.4.6 Remarque

Il est impératif de s'assurer qu'on a bien affaire à une forme indéterminée du type $0/0$ ou ∞/∞ avant d'appliquer BH, au risque d'obtenir un résultat faux. Par exemple,

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1 - \sin x}{x} = \pm\infty,$$

alors que la limite du rapport des dérivées donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\cos x}{1} = -1.$$

5.5 Développements limités

Nous étendons dans cette section la notion d'approximation linéaire au voisinage d'un point présentée plus haut à des polynômes de degré fini supérieur à un. C'est-à-dire que l'on peut, sous certaines conditions, approximer localement une fonction par un polynôme, l'approximation étant d'autant plus fidèle que le degré du polynôme est élevé. On comprend bien que pour avoir une bonne approximation polynomiale au voisinage d'un point, la fonction doit être suffisamment "lisse" autour de ce point, i.e. suffisamment dérivable en ce point. Nous présentons les formules de Taylor et MacLaurin qui donnent explicitement la construction des coefficients dans la plupart des cas.

5.5.1 Définition

Soit f une fonction définie dans un voisinage I de $a \in D(f)$. Pour tout $x \in I$, on définit le *développement limité* d'ordre n de f autour de a :

$$f(x) = f(a + h) = P_n(h) + o(h^n) \equiv P_n(x - a) + o((x - a)^n), \quad (5.15)$$

où

$$P_n(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n \quad (5.16)$$

est un polynôme de degré $\leq n$ en la variable $h = x - a$, appelé *partie principale* du développement limité, et $o(h^n)$ vérifiant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0 \quad (5.17)$$

est le *reste* du développement limité.

5.5.2 Proposition (*unicité du développement limité*)

Le développement limité d'ordre n de f autour de a , s'il existe, est unique.

Démonstration En effet, supposons qu'il existe deux polynômes de degré $\leq n$,

$$P_n(x) = P_n(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n, \quad Q_n = b_0 + b_1h + \dots + b_nh^n,$$

satisfaisant (5.15) et (5.17). On a donc que $P_n(h) - Q_n(h) = o(h^n)$, où $o(h^n)$ satisfait également (5.17), ce qui implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} h^{n-k} = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}. \quad (5.18)$$

Considérons alors l'expression

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \dots + (a_n - b_n)h^n = o(h^n). \quad (5.19)$$

Laissant $h \rightarrow 0$, on obtient $a_0 - b_0 = 0$. Donc le premier terme de (5.19) disparaît. Supposant maintenant $h \neq 0$, on divise alors les deux membres de (5.19) par h . Laissant $h \rightarrow 0$, (5.18) donne $a_1 - b_1 = 0$, disparition du deuxième terme de (5.19). On divise ensuite successivement (5.19) par h^k , $k = 2, \dots, n$, et on laisse à chaque étape $h \rightarrow 0$. En utilisant $a_{k-1} - b_{k-1} = 0$ et (5.18) pour $k = 2, \dots, n$, on obtient à chaque étape que $a_k - b_k = 0$. On conclut ainsi que $P = Q$. ♦

5.5.3 Exemples

- (i) Tout polynôme de degré n est son propre développement limité d'ordre n .
- (ii) Pour $n = 0$, on a $P_0(h) = f(a)$, alors qu'au premier ordre ($n = 1$) on obtient, si f est dérivable en a , l'approximation linéaire (5.1), $P_1(h) = f(a) + f'(a)h$.
- (iii) Considérons la fonction $f(x) = \sin(x)$. On peut toujours écrire que $\sin(x) = x + (\sin(x) - x)$, avec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = 0,$$

ce qui montre que le développement limité d'ordre 1 de f autour de 0 est $f(x) = x + o(x)$.

- (iv) Pour la fonction $\cos(x)$, la règle de l'Hospital donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{1} = 0,$$

et ainsi $\cos(x) = 1 + o(x)$ autour de 0.

Les deux propositions suivantes permettent de calculer efficacement des développements limités complexes à partir de développements plus simples. Leurs démonstrations (ainsi que des extensions des développements limités aux cas $a = \pm\infty$ ou a est une extrémité de l'intervalle I) peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Doneddu donné en référence à la fin du polycopié.

5.5.4 Proposition (*opérations sur les développements limités*)

Soient f et g définies sur un voisinage I du point $a \in \mathbb{R}$. Supposons que ces fonctions admettent chacune un développement limité d'ordre n autour de a , i.e. il existe des polynômes P_f et P_g de degré n tels que

$$f(x) = P_f(x - a) + o((x - a)^n), \quad g(x) = P_g(x - a) + o((x - a)^n), \quad x \in I.$$

On a alors les résultats suivants :

(i) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet le développement limité

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha P_f(x - a) + \beta P_g(x - a) + o((x - a)^n), \quad x \in I.$$

(ii) La fonction fg admet le développement limité

$$(fg)(x) = R(x - a) + o((x - a)^n), \quad x \in I,$$

où R est le polynôme obtenu en supprimant de $P_f P_g$ les termes de degré $> n$.

(iii) Si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g admet le développement limité

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = Q(x - a) + o((x - a)^n), \quad x \in I,$$

où Q est le polynôme obtenu en effectuant, à l'ordre n , la division selon les puissances croissantes de P_f par P_g .

5.5.5 Proposition (composition des développements limités)

Soient f et g définies sur un voisinage de $x = 0$ et admettant des développements limités d'ordre n en ce point :

$$f(y) = P_f(y) + o(y^n), \quad g(x) = P_g(x) + o(x^n).$$

Supposons en outre que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$. Alors la fonction $f \circ g$ admet au voisinage de $x = 0$ le développement limité

$$(f \circ g)(x) = P(x) + o(x^n),$$

où P est le polynôme obtenu en supprimant de $P_f \circ P_g$ les termes de degré $> n$.

Avant de donner des exemples d'application de ces résultats, nous présentons maintenant une méthode systématique pour construire les développements limités d'ordre n autour de a des fonctions qui sont au moins $n + 1$ fois dérivables au voisinage de a .

5.5.6 Théorème (formule de Taylor)

Soit $n \geq 1$, I un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ avec $f^{(n)}$ dérivable sur I . Alors f admet un développement limité d'ordre n autour de a donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}, \quad x \in I, \quad (5.20)$$

où $\tilde{x}$ est un réel compris entre x et a , i.e. $\tilde{x} = a + \eta(x - a)$ pour un $\eta \in (0, 1)$.

Démonstration Pour $x \in I$ fixé, posons

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \quad (5.21)$$

et soit $M = M(x)$ le nombre défini par

$$f(x) = P(x) + M(x - a)^{n+1}. \quad (5.22)$$

Nous cherchons $\tilde{x}$ compris entre x et a tel que $(n+1)!M = f^{(n+1)}(\tilde{x})$.

Considérons pour cela la fonction auxiliaire

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - a)^{n+1}, \quad t \in I. \quad (5.23)$$

On a $g \in C^n(I, \mathbb{R})$ avec $g^{(n)}$ dérivable sur I . De plus, par (5.21),

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!M, \quad t \in I.$$

Nous cherchons donc $\tilde{x}$ entre x et a tel que $g^{(n+1)}(\tilde{x}) = 0$. Puisque $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $k = 0, 1, \dots, n$, on a

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0.$$

D'autre part, (5.22) et (5.23) impliquent que $g(x) = 0$ et donc $g'(x_1) = 0$ pour un réel x_1 compris entre a et x (théorème de Rolle). Puisque $g'(a) = 0$, on conclut de même qu'il existe un réel x_2 compris entre a et x_1 tel que $g''(x_2) = 0$. En itérant ce procédé $n+1$ fois, on obtient $\tilde{x}$ compris entre a et x_n tel que $g^{(n+1)}(\tilde{x}) = 0$. ♦

5.5.7 Remarques

- (i) Constatez la puissance du théorème 5.5.6 qui assure, d'une part, l'existence du développement limité et qui donne, d'autre part, la construction des coefficients.
- (ii) Le reste donné sous cette forme est appelé *reste de Lagrange*. On remarque qu'il n'est pas explicite et que le paramètre η dépend de x . Il existe de multiples variantes du théorème de Taylor, avec diverses formules pour le reste. Dans le chapitre sur le calcul intégral, on verra la forme intégrale du reste, ainsi que le *reste de Cauchy*, cf. (8.17)
- (iii) Pour autant que l'on renonce à obtenir une formule pour le reste, les hypothèses du théorème 5.5.6 peuvent être considérablement affaiblies (voir Douchet-Zwahlen) : si $n \geq 1$ et $f \in C^{n-1}(I, \mathbb{R})$ avec $f^{(n-1)}$ dérivable en $x = a$, alors il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$, et telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \varepsilon(x)(x - a)^n, \quad x \in I.$$

- (iv) Pour $a = 0$, la formule ci-dessus est appelée *formule de MacLaurin*.
- (v) **Attention !** La réciproque du théorème 5.5.6 n'est pas vraie en général : une fonction peut par exemple admettre un développement limité d'ordre $n = 2$ autour de $x = 0$ sans pour autant être deux fois dérivable en ce point. Pour s'en convaincre, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0,$$

on a que $x^3 \sin(1/x) = o(x^2)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Ainsi f admet le développement limité de partie principale nulle en $x = 0$:

$$f(x) = o(x^2).$$

D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x), \quad \forall x \neq 0,$$

et

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x) = 0.$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

n'existe pas, on conclut que f' n'est pas dérivable en $x = 0$.

- (vi) Le point précédent montre que l'existence d'un développement limité d'ordre $n \geq 2$ autour de a ne garantit pas l'existence de la n -ième dérivée de la fonction en a . En revanche, si une fonction possède un développement limité d'ordre 1 autour de $x = a$, on se convainc aisément qu'elle se prolonge par continuité en une fonction dérivable en $x = a$.

5.5.8 Exemples

- (i) Calculons le développement limité d'ordre $n \geq 1$ de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ autour de $x = 0$. On va appliquer la formule de Taylor en remarquant que $f \in C^\infty((-1, \infty), \mathbb{R})$ avec

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}, \quad \dots$$

$$\dots \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}, \quad \forall k \geq 1,$$

$$\implies f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!, \quad \forall k \geq 1.$$

Ainsi, pour $n \geq 1$ et x au voisinage de $x = 0$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n). \quad (5.24)$$

- (ii) De la même manière, la formule de Taylor donne les développements limités autour de $x = 0$ des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Pour $n \geq 1$ et x au voisinage de $x = 0$, on obtient :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad (5.25)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}). \quad (5.26)$$

- (iii) En appliquant la proposition 5.5.4 (iii), on déduit de (5.25) et (5.26) le développement limité à l'ordre 6 de $\tan(x)$ autour de $x = 0$:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6). \quad (5.27)$$

- (iv) Calculons maintenant le développement limité à l'ordre 4 autour de $x = 0$ de la fonction $h(x) = \ln(\cos(x))$. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0,$$

on peut appliquer la proposition 5.5.5 avec $f(y) = \ln(1+y)$ et $g(x) = \cos(x) - 1$. On obtient alors, en composant les développements limités et en utilisant la formule (5.24),

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(1 + \cos(x) - 1) = (f \circ g)(x) \\ &= [\cos(x) - 1] - \frac{[\cos(x) - 1]^2}{2} + \frac{[\cos(x) - 1]^3}{3} - \frac{[\cos(x) - 1]^4}{4} + o([\cos(x) - 1]^4). \end{aligned}$$

D'autre part, la formule de Taylor donne

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

On a donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right]^2 + \frac{1}{3} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right]^3 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right]^4 + o\left(\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right]^4 \right). \quad (5.28) \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de développer tous les produits en manipulant habilement la notation $o(\cdot)$. Par exemple, le terme croisé $-x^2 o(x^4)$ dans le développement du second crochet de (5.28) est lui-même un $o(x^4)$ (revenez à la définition pour vous en convaincre). Ou encore, $o(x^4)^l = o(x^4)$ pour tout entier $l \geq 0$. Ainsi, le deuxième crochet de (5.28) s'écrit

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right]^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^{16}}{576} + o(x^4)^2 - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24} - 2\frac{x^2}{2}o(x^4) + 2\frac{x^4}{24}o(x^4) \right] \\ &= -\frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

On observe en outre que, dès le troisième crochet de (5.28), toutes les puissances de x sont ≥ 6 et sont donc "absorbées" dans le reste $o(x^4)$. On obtient ainsi

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Le résultat suivant peut également s'avérer utile en pratique.

5.5.9 Théorème (dérivée d'un développement limité)

Soit $n \geq 1$, I un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ avec $f^{(n)}$ dérivable sur I . Alors le développement limité d'ordre $n - 1$ de f' autour de a est donné par

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1} + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{n!} (x-a)^n,$$

où $\bar{x}$ est un réel compris entre x et a , i.e. $\bar{x} = a + \eta(x-a)$ pour un $\eta \in (0, 1)$.

Démonstration Découle directement du théorème 5.5.6 appliqué à f' . ♦

5.5.10 Exemple

Connaissant le développement limité d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ autour de $x = 0$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

on en déduit que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

ce qu'on aurait aussi pu obtenir en utilisant la formule de la série géométrique.

5.6 Comportement local d'une fonction

Nous démontrons dans cette section quelques résultats bien connus concernant le comportement d'une fonction dérivable au voisinage de ses points critiques (points de minimum ou de maximum local, points d'inflexion).

5.6.1 Proposition

Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R})$, avec I un voisinage de $a \in D(f)$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$. Alors a est un point de minimum local de f si $f''(a) > 0$, de maximum local si $f''(a) < 0$.

Démonstration Pour tout $x \in I$, la formule de Taylor nous assure l'existence d'un point $\tilde{x}$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(\tilde{x})}{2!} (x-a)^2.$$

Puisque $f \in C^2(I, \mathbb{R})$, la fonction f'' est continue. Donc, si $f''(a) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x-a| < \delta \implies |\tilde{x}-a| < \delta \implies f''(\tilde{x}) > 0.$$

Ainsi, pour $0 < |x-a| < \delta$,

$$f(x) - f(a) > 0,$$

ce qui montre que a est un point de minimum local de f . On traite de manière analogue le cas $f''(a) < 0$. ♦

5.6.2 Remarques

- (i) Notez que le signe de la dérivée seconde nous informe sur la convexité de f au voisinage du point a , ce qui détermine la nature du point critique.
- (ii) La proposition 5.6.1 se généralise aisément et on obtient que si $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, et que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x - a| < \delta \implies \operatorname{sgn}[f(x) - f(a)] = \operatorname{sgn} \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right] \operatorname{sgn}[(x - a)^n]. \quad (5.29)$$

On remarque ainsi que a est un point d'extremum local si et seulement si n est pair. Dans ce cas, l'extremum est un min local si $f^{(n)}(a) > 0$, un max local si $f^{(n)}(a) < 0$.

- (iii) Si n est impair, le point critique est un point à tangente horizontale mais pas un point d'extremum local. En effet, dans ce cas, (5.29) montre que $f(x) - f(a)$ change de signe en $x = a$. Dans le cas présent, $f'(a) = 0$ et l'équation de la tangente au graphe de f en $x = a$ est simplement $y = f(a)$. On conclut donc que la tangente (horizontale) coupe le graphe en ce point. Un tel point est ce qu'on appelle un point d'inflexion. Les points d'inflexion seront définis et étudiés de manière plus générale aux paragraphes 5.6.5 et suivants.

5.6.3 Exemples

- (i) $f(x) = x^2$ est de classe C^∞ au voisinage de $a = 0$ et l'on a

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 > 0 \implies a = 0 \text{ point de minimum (local et global).}$$
- (ii) $f(x) = x^3$ est de classe C^∞ au voisinage de $a = 0$ et l'on a

$$f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 6 \neq 0 \implies a = 0 \text{ point d'inflexion.}$$
- (iii) $f(x) = -x^4$ est de classe C^∞ au voisinage de $a = 0$ et l'on a

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = -24 < 0 \implies a = 0 \text{ point de maximum.}$$

5.6.4 Proposition

Soit I un intervalle ouvert et $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f'' \geq 0$ sur I . Alors, pour tout $a \in I$, la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ se trouve en dessous de cette courbe.

Démonstration L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a \in I$ est donnée par $y_t - f(a) = f'(a)(x - a)$. Le développement limité au premier ordre de f autour de a donne un voisinage de a sur lequel

$$y_f = f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x - a)^2,$$

avec $\tilde{x}$ entre a et x . On en déduit, pour tout x dans ce voisinage,

$$y_f - y_t = \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x - a)^2 \geq 0. \quad \blacklozenge$$

5.6.5 Définition

Soit f une fonction dérivable en $a \in D(f)$.

On dit que $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de f s'il existe $\delta > 0$ et $c \neq 0$ tels que

$$0 < |x - a| < \delta \implies c(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a))(x - a) > 0. \quad (5.30)$$

En d'autres termes, $(a, f(a))$ est un point d'inflexion si l'expression

$$(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a))(x - a)$$

a un signe constant sur $(a - \delta, a + \delta)$.

La proposition suivante montre que, pour une fonction $f \in C^2$ telle que f'' est non nulle dans un voisinage pointé de $x = a$, $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f si et seulement si $f''(x)$ change de signe en $x = a$.

5.6.6 Proposition

Soit I un intervalle ouvert, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

(i) S'il existe $\delta > 0$ et $c_0 \neq 0$ tels que

$$0 < |x - a| < \delta \implies c_0 f''(x)(x - a) > 0,$$

alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f .

(ii) S'il existe $\delta > 0$ et $c_1 \neq 0$ tels que

$$0 < |x - a| < \delta \implies c_1 f''(x) > 0,$$

alors $(a, f(a))$ n'est pas un point d'inflexion de f .

Démonstration

(i) Soit $x \in I$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Par la formule de Taylor, il existe $\eta \in (0, 1)$ tel que

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = f''(a + \eta(x - a)) \frac{(x - a)^2}{2!}. \quad (5.31)$$

On remarque alors que le point $\tilde{x} := a + \eta(x - a)$ satisfait $0 < |\tilde{x} - a| < |x - a| < \delta$. Multipliant les deux membres de (5.31) par $c_0 \eta(x - a)$, notre hypothèse donne donc

$$\begin{aligned} c_0 \eta(x - a)(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)) &= \frac{(x - a)^2}{2!} c_0 f''(a + \eta(x - a)) \eta(x - a) \\ &= \frac{(x - a)^2}{2!} c_0 f''(\tilde{x})(\tilde{x} - a) > 0. \end{aligned}$$

On peut donc prendre $c = c_0 \eta$ dans la définition 5.6.5 et $(a, f(a))$ est bien un point d'inflexion de f .

(ii) Par hypothèse, l'identité (5.31) montre que l'expression

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

ne change pas de signe sur $(a - \delta, a + \delta)$, ce qui montre que $(a, f(a))$ n'est pas un point d'inflexion. ♦

Le résultat suivant généralise la discussion faite à la remarque 5.6.2 (iii) aux situations où $f'(a)$ est quelconque.

5.6.7 Proposition

Soit $n \geq 3$ impair et soit $f \in C^n(I, \mathbb{R})$, avec I un voisinage de $a \in D(f)$. Si $f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion.

Démonstration Par la formule de Taylor, on a que

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = f^{(n)}(a + \eta(x - a)) \frac{(x - a)^n}{n!}$$

pour un certain $\eta \in (0, 1)$. Supposons sans perte de généralité que $f^{(n)}(a) > 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $f^{(n)}(x) > 0$ pour $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta$. Ainsi, comme n est impair,

$$0 < |x - a| < \delta \implies$$

$$(x - a)(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)) = f^{(n)}(a + \eta(x - a)) \frac{(x - a)^{n+1}}{n!} > 0,$$

et (5.30) est vérifié. ♦

Chapitre 6

Suites de fonctions

Nous présentons maintenant la notion de suite de fonctions réelles et les notions de convergence y relatives. L'étude des suites de fonctions nous permettra de définir les séries entières qui constituent une classe particulière de suites de fonctions et qui fournissent une généralisation du développement limité.

La lectrice intéressée par des concepts d'analyse plus généraux notera, en lien avec la remarque 2.5.4, que la notion de convergence uniforme développée dans ce qui suit n'est rien d'autre que la convergence définie sur un espace métrique de fonctions M avec la métrique $d(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$ pour $f, g \in M$ des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ (cf. remarque 6.1.12). A ce sujet, on pourra consulter l'ouvrage de Rudin.

6.1 Convergence, continuité

6.1.1 Définition

On appelle *suite de fonctions* une collection infinie, dénombrable et ordonnée de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toutes définies sur un même domaine $E \subset \mathbb{R}$.

6.1.2 Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

- (i) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *ponctuellement* (ou *simplement*) vers la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et on note $f_n \longrightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$), si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in E.$$

- (ii) On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *uniformément* vers la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et on note $f_n \xrightarrow{U} f$ ($n \rightarrow \infty$), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N(\varepsilon) \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

- (iii) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *uniformément de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m \geq N(\varepsilon) \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

6.1.3 Remarque

- (i) Noter que la convergence uniforme implique la convergence ponctuelle.
- (ii) Dire que la convergence est uniforme revient à dire que la “vitesse” à laquelle $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ ne dépend pas du point x considéré.
- (iii) Les définitions 6.1.2 (ii) et (iii) sont respectivement équivalentes à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

et

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| = 0.$$

6.1.4 Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy si et seulement si il existe une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{U} f$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration Cf. exercices. ♦

6.1.5 Exemple

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $(0, 1/2)$ par

$$f_n : (0, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1 + x^n}{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On voit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction

$$f : (0, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

De plus, la convergence est uniforme. En effet,

$$\sup_{x \in (0, 1/2)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0, 1/2)} \left| \frac{1 + x^n}{x} - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x \in (0, 1/2)} |x^{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

On pouvait aussi invoquer le théorème 6.1.4 pour déduire la convergence uniforme. En effet, pour tout $x \in (0, 1/2)$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= \left| \frac{1 + x^n}{x} - \frac{1 + x^m}{x} \right| = \left| \frac{x^n - x^m}{x} \right| = |x^{n-1} - x^{m-1}| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

6.1.6 Proposition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $f_n \xrightarrow{U} f$ et $g_n \xrightarrow{U} g$ ($n \rightarrow \infty$) et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{U} \alpha f + \beta g$ ($n \rightarrow \infty$).

Démonstration Cf. exercices. ♦

6.1.7 Remarque

Si les deux limites f et g sont bornées, alors $f_n \xrightarrow{U} f$ et $g_n \xrightarrow{U} g$ entraînent $f_n g_n \xrightarrow{U} fg$. Pour se convaincre que ce n'est pas le cas en général, on peut considérer $f_n(x) = x + 1/n$ pour $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n(x) \xrightarrow{U} f(x) = x$. En revanche, $f_n(x)^2 \rightarrow f(x)^2$ ponctuellement mais pas uniformément. En effet,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)^2 - f(x)^2| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| 2x \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

6.1.8 Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$, qui converge uniformément vers une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de E , i.e. il existe une suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \rightarrow a$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite

$$\alpha_n := \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

existe. Alors la suite (α_n) converge et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n. \quad (6.1)$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Puisque, par le théorème 6.1.4, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy, il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N, \quad \forall x \in E.$$

On en déduit que la suite (α_n) est de Cauchy, donc convergente. On note α sa limite et on écrit

$$|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha|. \quad (6.2)$$

Choisissons maintenant $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.3)$$

pour tout $x \in E$ (convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f), et tel que

$$|\alpha_{n_0} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.4)$$

Cet entier n_0 étant fixé, il existe alors un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$x \in E, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \implies \quad |f_{n_0}(x) - \alpha_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.5)$$

Combinant (6.2), (6.3), (6.4) et (6.5), on obtient

$$x \in E, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

ce qui prouve (6.1). ♦

6.1.9 Remarque

L'astuce utilisée pour conclure la démonstration ci-dessus est couramment utilisée en analyse et on l'appelle parfois "truc du $\varepsilon/3$ ".

6.1.10 Remarque (permutation des limites)

- (i) On peut écrire l'égalité (6.1) explicitement comme

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x),$$

et l'on remarque donc que **la convergence uniforme permet de permuter l'ordre des limites**.

- (ii) Considérons maintenant la suite de fonctions continues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1/(1+x^2)^n$. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x).$$

Ainsi, puisque (6.1) n'est pas vérifiée en $a = 0$, nous déduisons du théorème 6.1.8 que la convergence n'est pas uniforme.

- (iii) Un exemple plus élémentaire de situation où l'on ne peut pas permuter les limites (problème fréquent en analyse!) est donné par la suite double

$$x_{m,n} = \frac{m}{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

On remarque en effet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $x_{m,n} \longrightarrow 1$ ($m \rightarrow \infty$), et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m,n} = 1.$$

En revanche, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, $x_{m,n} \longrightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), d'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m,n} = 0.$$

Nous énonçons maintenant un résultat fondamental, qui est un corollaire immédiat du théorème 6.1.8.

6.1.11 Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([a, b], \mathbb{R})$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$.

Démonstration Nous laissons à la lectrice le soin de rédiger la preuve en utilisant le théorème 6.1.8. ♦

6.1.12 Remarque

Une conséquence importante des théorèmes 6.1.4 et 6.1.11 est que $C^0([a, b], \mathbb{R})$, muni de la distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

est un espace métrique complet (cf. remarque 2.5.4).

6.1.13 Exemple

- (i) Soit $f_n(x) = x^n/(1 + x^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 2]$. On a que $f_n \rightarrow f$ où f est la fonction définie par

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Puisque f n'est pas continue, on conclut que la convergence n'est pas uniforme.

- (ii) Donnons maintenant un exemple qui montre qu'une suite de fonctions continues peut converger ponctuellement vers une fonction continue, sans que la convergence soit uniforme. Considérons pour cela la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n+1}), \\ -(n+1)^2 x + 2(n+1), & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Il peut être utile d'esquisser le graphe d'une telle fonction.) On se convainc facilement que $f_n \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction identiquement nulle $f \equiv 0$. En effet, pour $x \in (0, 1]$, on remarque que $f_n(x) = 0$ dès que $2/(n+1) < x$. En revanche, la convergence n'est pas uniforme : $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = n + 1$.

- (iii) Signalons encore qu'une fonction continue peut être la limite uniforme d'une suite de fonctions discontinues. Par exemple, la suite de fonction de terme général

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \frac{1}{n+1}, & x = 0, \end{cases}$$

converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

6.2 Suites monotones

6.2.1 Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *croissante* si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$.

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *décroissante* si $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est *monotone*.

6.2.2 Théorème (*Dini*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([a, b], \mathbb{R})$ une suite de fonctions monotone convergeant simplement vers $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors la convergence est uniforme.

Démonstration Nous démontrons le théorème par contraposition. Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \in \mathbb{N}, x_m \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad |f_{n_m}(x_m) - f(x_m)| \geq \varepsilon. \quad (6.6)$$

Nous obtenons ainsi une suite de réels $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ et une sous-suite $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par Bolzano-Weierstrass, (x_m) admet une sous-suite convergente,

$$x_{m_j} \longrightarrow x^* \in [a, b] \quad (j \rightarrow \infty).$$

Nous allons prouver que f n'est pas continue au point x^* , d'où la conclusion. Pour ce faire, nous montrons que $|f(x_{m_j}) - f(x^*)|$ est borné loin de zéro en utilisant (6.6), où ε est fixé une fois pour toutes.

Tout d'abord, par convergence ponctuelle, il existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (6.7)$$

D'autre part, par continuité de $f_{n_{m_{j_0}}}$ au point x^* , il existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f_{n_{m_{j_0}}}(x^*)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall j \geq j_1. \quad (6.8)$$

Pour fixer les idées, supposons dès maintenant que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. (Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, le raisonnement qui suit peut être appliqué à $(-f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est décroissante et converge ponctuellement vers $-f$.) On a alors

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in [a, b].$$

Donc (6.6) donne

$$f_{n_{m_j}}(x_{m_j}) - f(x_{m_j}) \geq \varepsilon, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

La décroissance de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implique aussi

$$f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) \geq f_{n_{m_j}}(x_{m_j}), \quad \forall j \geq j_0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f(x_{m_j})| &= f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f(x_{m_j}) \\ &\geq f_{n_{m_j}}(x_{m_j}) - f(x_{m_j}) \geq \varepsilon, \quad \forall j \geq j_0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Nous pouvons alors faire l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} |f(x_{m_j}) - f(x^*)| &= |f(x_{m_j}) - f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) + f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) + f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) - f(x^*)| \\ &\geq \underbrace{|f(x_{m_j}) - f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j})|}_{\geq \varepsilon} + \underbrace{|f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) + f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) - f(x^*)|}_{< \varepsilon/2}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Par (6.7) et (6.8),

$$\begin{aligned} & |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) + f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) - f(x^*)| \\ & \leq |f_{n_{m_{j_0}}}(x_{m_j}) - f_{n_{m_{j_0}}}(x^*)| + |f_{n_{m_{j_0}}}(x^*) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j \geq j_1. \end{aligned}$$

On déduit donc de (6.9) et (6.10) que

$$|f(x_{m_j}) - f(x^*)| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall j \geq \max\{j_0, j_1\},$$

ce qui termine la preuve. ♦

Nous donnons maintenant une autre démonstration, par la méthode directe, basée sur le lemme de Heine-Borel-Lebesgue.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. On va de nouveau utiliser ici le truc du $\varepsilon/3$. Puisque $f_n \rightarrow f$ simplement, pour tout $x \in [a, b]$ fixé il existe $n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n(\varepsilon, x)}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.11)$$

D'autre part, puisque f_n et f sont continues sur $[a, b]$, il existe $\delta(x) > 0$ tel que pour $|x - y| < \delta(x)$, on ait

$$|f_{n(\varepsilon, x)}(x) - f_{n(\varepsilon, x)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (6.12)$$

et

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.13)$$

On a alors un recouvrement ouvert

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} B(x, \delta(x)).$$

Par le lemme 4.5.7 (Heine-Borel-Lebesgue), on peut donc trouver un $N \in \mathbb{N}$ et une suite finie $s = (x_0, \dots, x_N)$ tels que

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=0}^N B(x_k, \delta(x_k)).$$

Posons maintenant $n_0(\varepsilon) = \max\{n(\varepsilon, x_k); 0 \leq k \leq N\}$ et soit $x \in [a, b]$. Alors il existe $i \in \{0, \dots, N\}$ tel que $|x - x_i| < \delta(x_i)$ et ainsi, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, la monotonie de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et les relations (6.11), (6.12) et (6.13) impliquent

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| & \leq |f_{n(\varepsilon, x_i)}(x) - f(x)| \\ & \leq |f_{n(\varepsilon, x_i)}(x) - f_{n(\varepsilon, x_i)}(x_i)| + |f_{n(\varepsilon, x_i)}(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ & < \varepsilon, \end{aligned}$$

uniformément en $x \in [a, b]$ car n_0 ne dépend que de ε . ♦

6.2.3 Exemple

On définit sur $[0, 1]$ une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$P_0(x) \equiv 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.14)$$

Nous allons montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} \underbrace{(x - P_n(x))^2}_{\geq 0} \geq P_n(x), \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions. D'autre part, pour $x \in [0, 1]$ fixé, la suite numérique $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et bornée. Elle converge donc vers un nombre réel $P(x)$ satisfaisant

$$P(x) = P(x) + \frac{1}{2}(x - P(x))^2.$$

Comme $P(x) \geq 0$, il vient $P(x) = \sqrt{x}$. Ainsi $P_n(x) \rightarrow \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0, 1]$ et, par le théorème précédent, la convergence est uniforme.

Récurrence : Tout d'abord, P_0 satisfait bien $0 \leq P_0(x) \leq \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Supposons maintenant que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2 \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x)) \left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Remarquons que l'hypothèse de récurrence implique

$$\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \geq 0.$$

La première inégalité est évidente. La seconde s'obtient comme suit :

$$1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \iff \sqrt{x} + P_n(x) \leq 2,$$

ce qui découle de $P_n(x) \leq \sqrt{x}$ et $x \in [0, 1]$. Ainsi, (6.15) implique $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. $P_{n+1}(x) \geq 0$ découle de (6.14) en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence.

6.3 Fonctions dérivables

6.3.1 Théorème (*différentiation des suites de fonctions*)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Si $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (6.16)$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n, m \geq N \implies$

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.17)$$

et

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (6.18)$$

Nous appliquons maintenant le TAF (corollaire 5.2.4) à la fonction $f_n - f_m$. Pour $n, m \geq N$, on obtient par (6.18) que

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) + f_m(y)| < \frac{\varepsilon|x-y|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, y \in [a, b]. \quad (6.19)$$

Il suit alors de (6.17) et (6.19) que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon,$$

pour tout $n, m \geq N$ et tout $x \in [a, b]$. Ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[a, b]$ et donc, par le théorème 6.1.4, converge uniformément sur cet intervalle. Soit f sa limite.

Pour $x \in [a, b]$ fixé, on définit alors, pour tout $y \in [a, b] \setminus \{x\}$:

$$\phi_n(y) = \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}, \quad \phi(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \quad (6.20)$$

On remarque tout d'abord que

$$\lim_{y \rightarrow x} \phi_n(y) = f'_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.21)$$

D'autre part, la première inégalité de (6.19) entraîne, pour $n, m \geq N$:

$$|\phi_n(y) - \phi_m(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall y \in [a, b] \setminus \{x\}.$$

Par conséquent, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b] \setminus \{x\}$. Comme $f_n(y) \rightarrow f(y)$ pour tout $y \in [a, b] \setminus \{x\}$, on déduit de (6.20) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(y) = \phi(y), \quad (6.22)$$

uniformément pour $y \in [a, b] \setminus \{x\}$. On conclut maintenant grâce à (6.21) et (6.22) en appliquant le théorème 6.1.8 à la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{y \rightarrow x} \phi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x). \quad \blacklozenge$$

6.3.2 Remarque

On peut avoir des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dérivables avec $f_n \xrightarrow{U} f$ sans avoir pour autant que $f'_n \rightarrow f'$, même ponctuellement.

En effet, considérons par exemple la suite de fonctions donnée par

$$f_n(x) = \sin(nx)/n, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On remarque que $|f_n(x)| \leq 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $f_n \xrightarrow{U} f \equiv 0$ sur $[-1, 1]$. Mais $f'_n(x) = \cos(nx)$ et donc

$$f'(0) = 0 \neq 1 = f'_n(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Autre exemple : soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a que f_n est dérivable sur $[-1, 1]$ avec

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$. Comme g est discontinue, la convergence ne peut pas être uniforme. D'autre part, $f_n \xrightarrow{U} f$, avec $f(x) = |x|$, qui n'est pas dérivable en $x = 0$.

6.4 Théorème de Stone-Weierstrass

Dans l'exemple 6.2.3, nous avons construit une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Il s'avère que toute fonction continue sur un intervalle fermé peut y être approximée uniformément par des polynômes.

6.4.1 Théorème (Stone-Weierstrass)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soient $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Démonstration La démonstration fait appel au calcul intégral, elle sera étudiée aux exercices en temps voulu. ♦

6.4.2 Remarque

Le résultat reste vrai pour des fonctions à valeurs complexes, qui sont alors approximées par des polynômes à coefficients complexes.

Chapitre 7

Séries entières, fonctions analytiques

Nous commençons ce chapitre par les notions de limites inférieures et supérieures d'une suite. Ce sont des extensions de la notion de limite d'une suite, qui s'avèrent utiles dans certains raisonnements. Nous entamons ensuite l'étude des séries entières, ou séries de puissances, qui nous conduira par la suite à une généralisation de la notion de développement limité. On verra que certaines "bonnes" fonctions, dites analytiques, peuvent être représentées en tout point de leur domaine de définition par une série entière appelée série de Taylor.

7.1 Limites inférieures et supérieures d'une suite

7.1.1 Définition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $a \in \bar{\mathbb{R}}$ est un *point d'accumulation* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a , ou qui diverge vers a dans le cas où $a = \pm\infty$. On note $\text{acc}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des points d'accumulations de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $\text{acc}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on définit la *limite supérieure* et la *limite inférieure* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$(i) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \text{acc}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$(ii) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \text{acc}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ces définitions s'appliquent aux suites bornées. En effet, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, nous avons $\text{acc}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et $\text{acc}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$ (par Bolzano-Weierstrass). Afin de pouvoir aussi considérer des suites non-bornées, et donc des $\liminf$ et $\limsup$ infinies, nous la complétons comme suit.

Si $-\infty \in \text{acc}(x_n)$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Si $+\infty \in \text{acc}(x_n)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Si $\text{acc}(x_n) = \{-\infty\}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Si $\text{acc}(x_n) = \{+\infty\}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Puisque $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ existent toujours dans $\bar{\mathbb{R}}$, il est souvent utile de les utiliser dans certains raisonnements concernant des suites dont on ne sait pas a priori si elles convergent (cf. par exemple série 4B).

Les résultats suivants sont des conséquences directes des définitions ci-dessus.

7.1.2 Proposition

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(i) Si (x_n) est bornée, alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sont finis et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(ii) (x_n) converge ssi $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sont finies et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(iii) Si $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(iv) On a toujours

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(v) Si $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = x \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = x \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Démonstration Exercice. ♦

7.2 Séries entières

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On considère $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et on rappelle la formule de Taylor de f au point a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o(|x-a|^n).$$

Si $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, on se demande maintenant s'il est possible d'écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (7.1)$$

Pour chaque valeur de $x \in I$, on doit donc tout d'abord étudier la convergence de la série dans le membre de droite de (7.1) et, au cas où elle converge, comparer la valeur de la limite avec $f(x)$.

Si l'on regarde la série comme la suite de ses sommes partielles, et que $x \in I$ est variable, on voit qu'on a à faire à une suite de fonctions. L'étude qui suit fera donc appel à la fois aux résultats sur les séries numériques et à ceux concernant les suites de fonctions.

Par commodité, nous commencerons par étudier les séries autour du point $a = 0$, puis nous expliquerons (cf. remarque 7.2.11) comment les résultats se généralisent au cas $a \neq 0$.

7.2.1 Définition

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle *série entière* ou encore *série de puissances* une **expression formelle** du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On parle d'expression formelle dans le sens où, pour un $x \in \mathbb{R}$ arbitraire, on ne sait encore rien sur la convergence de la série. On définit alors une fonction $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (7.2)$$

où $D(f) := \{x \in \mathbb{R}; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$.

Nous allons bientôt voir que le domaine de définition d'une série entière autour de $a = 0$ est toujours un intervalle symétrique par rapport à l'origine.

7.2.2 Définition

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la quantité R définie comme

$$R = \sup E, \quad E := \left\{ |x|; x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}. \quad (7.3)$$

Remarquons tout d'abord que $R \in [0, \infty]$ car $E \neq \emptyset$. En effet, $0 \in E$.

7.2.3 Théorème

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et R défini par (7.3). Posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

(i) Si $|x| > R$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge.

(ii) Supposons $R > 0$. Pour tout $\rho \in (0, R)$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument uniformément sur $[-\rho, \rho]$, i.e. la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur cet intervalle et, pour chaque $x \in [-\rho, \rho]$, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est absolument convergente.

Démonstration (i) découle immédiatement de la définition (7.3).

(ii) Soit $\rho \in (0, R)$. Par définition de R , il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\rho < |x_0| \leq R$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge. En particulier, $|a_n| |x_0|^n \rightarrow 0$ donc il existe $M \geq 0$ tel que

$|a_n||x_0|^n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $\xi = \rho/|x_0|$, $\rho = \xi|x_0|$. Comme $\xi \in (0, 1)$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n < \infty.$$

Maintenant, soit $m, n \in \mathbb{N}$ et supposons s.p.d.g. que $m > n$. La convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n$ et la remarque 3.1.4 (i) entraînent

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \rho^k \longrightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty),$$

uniformément pour $x \in [-\rho, \rho]$. Ainsi, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy et donc uniformément convergente sur $[-\rho, \rho]$. D'autre part, pour chaque $x \in [-\rho, \rho]$ fixé, on a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty,$$

ce qui termine la preuve. ♦

On déduit du théorème précédent que le domaine de définition de la série entière est l'un des sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivants :

$$[-R, R] \quad (-R, R) \quad [-R, R) \quad (-R, R].$$

Pour $|x| = R$, le théorème ne donne pas d'information quant à la convergence de la série. En fait, les quatre scénarios ci-dessus sont possibles et il faut étudier "à la main" les séries correspondant à $x = \pm R$.

7.2.4 Exemple

(i) Soit f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{7.4}$$

On a alors $R = 1$ et $D(f) = (-1, 1)$. De plus, pour tout $x \in (-1, 1)$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(ii) Considérons la suite donnée par $a_0 = 1$ et $a_n = 1/n$, $n \geq 1$, et posons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Pour $x = 1$, on a la série harmonique qui est divergente, alors que pour $x = -1$, c'est la série harmonique alternée, qui est convergente. On trouve ainsi que $R = 1$ et $D(f) = [-1, 1)$.

La définition étant peu commode en pratique, nous nous intéressons maintenant à établir une méthode générale permettant de calculer le rayon de convergence. Nous commençons par généraliser le critère de la racine pour les séries numériques.

7.2.5 Proposition

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Posons $l = \limsup \sqrt[n]{|b_n|}$. Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge absolument si $l < 1$, diverge si $l > 1$.

Démonstration La preuve est similaire à celle du critère 3.2.12, nous la laissons en exercice. ♦

Le résultat le plus général pour calculer le rayon de convergence est le suivant.

7.2.6 Théorème

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est donné par

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Démonstration Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons

$$l = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Par la proposition 7.2.5, on a bien que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge si $|x| < 1 / \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, diverge si $|x| > 1 / \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. ♦

Dans de nombreux cas, le résultat suivant est aussi utile.

7.2.7 Théorème

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in [0, \infty].$$

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est donné par $R = 1/L$.

Démonstration Fixons $x \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

le critère du quotient pour les séries numériques donne en effet que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge si $|x| < 1/L$, diverge si $|x| > 1/L$. ♦

7.2.8 Exemple

(i) Soit $a_n = n^n$, $n \geq 1$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} (n+1) \longrightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

d'où $R = 0$. Donc la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ne converge que pour $x = 0$.

(ii) La fonction exponentielle est définie par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Montrons qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

et donc $R = \infty$.

(iii) Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

On a ici que $a_{2n} = 0$ alors que $|a_{2n+1}| = 1/(2n+1)!$, $n \in \mathbb{N}$. On ne peut donc pas appliquer le critère du quotient. En revanche le critère de la racine donne

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1/\sqrt[n]{n!}, & n \text{ impair}, \\ 0, & n \text{ pair}, \end{cases}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ et donc $R = \infty$. On verra à la section 7.3.11 que cette série entière est la série de Taylor de la fonction $\sin(x)$ autour de $x = 0$.

(iv) On obtient aussi $R = \infty$ pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ (série de Taylor de $\cos(x)$).

Nous établissons maintenant un résultat très fort sur la dérivabilité d'une fonction définie par une série entière.

7.2.9 Théorème

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec rayon de convergence $R > 0$. On a $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$, avec les formules suivantes :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad \dots$$

Démonstration Posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Par hypothèse, $f_n \rightarrow f$ ponctuellement sur $(-R, R)$ (et uniformément sur $[-\rho, \rho]$, pour tout $\rho \in (0, R)$). Par ailleurs, $(f_n) \subset C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$ car chaque f_n est un polynôme. On a

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Son rayon de convergence est donné par

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n a_n}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = R.$$

Soit alors $\rho \in (0, R)$. Par le théorème 7.2.3, la suite de fonctions (f'_n) est uniformément convergente sur $[-\rho, \rho]$. Alors, par le théorème 6.3.1 (différentiation des suites de fonctions), f est dérivable et

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in [-\rho, \rho].$$

On peut ensuite répéter l'argument ci-dessus avec f' à la place de f . On obtient que la série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ a le même rayon de convergence R . Donc, pour tout $\rho \in (0, R)$, la suite de fonctions (f''_n) est uniformément convergente sur $[-\rho, \rho]$. Par le théorème 6.3.1, f' est dérivable et

$$f''(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f''_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}, \quad \forall x \in [-\rho, \rho].$$

En itérant le procédé, on obtient que $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$ et que l'on peut calculer les dérivées successives en dérivant la série "terme à terme". ♦

7.2.10 Corollaire

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec rayon de convergence $R > 0$. Les coefficients de la série, appelés coefficients de Taylor sont alors donnés par

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.5)$$

Démonstration En considérant les dérivées successives de f , on a

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = a_1 \\ \dots &= \dots \implies \dots \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \implies f^{(k)}(0) = k! a_k. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

7.2.11 Remarque

- (i) Tous les résultats de la section 7.2 restent valables avec des modifications évidentes pour les séries entières de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, appelées *séries entières autour de $x=a$* . Par exemple, dans le cas général le domaine de définition d'une série entière autour de a est un intervalle de la forme

$$[a-R, a+R] \quad (a-R, a+R) \quad [a-R, a+R) \quad (a-R, a+R].$$

Dans le cas où une fonction est représentée par une telle série, on parle de série de Taylor autour de $x=a$ et les coefficients de Taylor (7.5) deviennent

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.6)$$

Nous invitons le lecteur à parcourir toute la section et à récrire par lui-même tous les détails pour les séries autour d'un point a quelconque.

- (ii) Si une fonction est représentée par sa série de Taylor autour de $x = a$, il découle de la formule (7.6) que cette représentation est unique.

Nous avons vu ci-dessus que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est bien définie pour tout $x \in (-R, R)$, $R > 0$, alors $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$. On est ainsi amené à se poser la question réciproque, i.e. si pour $R > 0$ donné et pour une fonction $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$, on peut toujours écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La réponse est non en général, comme le montre l'exemple suivant.

7.2.12 Exemple

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

On peut prouver (cf. exercices) que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ pour tout $x \in (-R, R)$, quel que soit $R > 0$. Si l'on pouvait représenter f par une série entière autour de 0, le corollaire 7.2.10 impliquerait alors que $f \equiv 0$ sur un voisinage de 0, ce qui est faux.

La question soulevée ici nous conduit à introduire la définition suivante.

7.2.13 Définition

Soit $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle ouvert. Si pour tout $a \in I$, il existe $R_a \in (0, \infty]$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad \forall x \in (a - R_a, a + R_a),$$

alors on dit que f est une *fonction analytique*.

7.3 Fonctions élémentaires

Nous avons supposé jusqu'ici que la lectrice est familière avec les fonctions les plus courantes : les fonctions puissances, trigonométriques, exponentielles et logarithmiques (qui sont toutes analytiques sur un domaine de définition approprié). Nous nous sommes permis de les utiliser dans plusieurs exemples. Nous possédons à présent tous les outils nécessaires pour les définir et les étudier rigoureusement.

Nous commençons naturellement par la fonction la plus importante en mathématiques : la fonction exponentielle.

7.3.1 Définition

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (7.7)$$

On a vu que son rayon de convergence est $R = \infty$.

Nous commençons par justifier l'écriture usuelle

$$\exp(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le nombre e a été défini au chapitre 2 comme

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (7.8)$$

Ainsi, la fonction $r \mapsto e^r$ est bien définie sur $\mathbb{Q}$: si $r = p/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose simplement $e^r := (e^p)^{1/q}$. En revanche, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, **on ne peut pas donner une définition de e^x par les opérations algébriques élémentaires.**

Nous montrons maintenant que e^r coïncide avec la fonction $\exp(r)$ sur $\mathbb{Q}$.

7.3.2 Proposition

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $e^r = \exp(r)$.

Démonstration La démonstration se déroule en trois étapes.

— Étape 1 : En écrivant $\exp(x) = 1 + x + x^2/2! + \dots$, on a immédiatement que

$$\exp(0) = 1.$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrons que

$$\exp(x) \exp(y) = \exp(x + y). \quad (7.9)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \exp(x) \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots\right) \\ &= 1 + (x + y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \dots \\ &= 1 + (x + y) + \frac{1}{2!}(x + y)^2 + \frac{1}{3!}(x + y)^3 + \dots \\ &= \exp(x + y). \end{aligned}$$

(Notez que la permutation des termes de la série est justifiée par le lemme 3.3.1.)
On en déduit en particulier que

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\exp(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.10)$$

Par le TVI, nous avons alors que

$$\exp(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

car $\exp(0) = 1$ et $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, en dérivant la série terme à terme, on obtient

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

— Etape 2 : Nous montrons maintenant que

$$\exp(1) = e. \quad (7.11)$$

On a déjà vu à l'exemple 2.1.12 (ii) que $e \leq \exp(1)$. Il reste à montrer que $\exp(1) \leq e$. Pour cela, fixons $m \in \mathbb{N}$ et considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right). \end{aligned}$$

C'est une suite croissante qui converge vers $1 + 1/1! + \dots + 1/m!$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'autre part, on sait de l'exemple 2.1.12 (ii) que

$$a_n \leq (1 + 1/n)^n \leq e, \quad \forall n \geq m.$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, on a donc

$$1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{m!} \leq e, \quad m \geq 1.$$

Le résultat s'obtient en laissant $m \rightarrow \infty$ dans cette inégalité.

— Etape 3 : En utilisant (7.9) et (7.11), un raisonnement par récurrence montre que $e^n = \exp(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

On remarque également que

$$\underbrace{e^{1/n} \dots e^{1/n}}_{n \text{ fois}} = e = \exp(1) = \underbrace{\exp(1/n) \dots \exp(1/n)}_{n \text{ fois}},$$

d'où $(e^{1/n})^n = (\exp(1/n))^n$ et donc $e^{1/n} = \exp(1/n)$, $n \geq 1$.

Finalement,

$$e^{m/n} = \underbrace{e^{1/n} \dots e^{1/n}}_{m \text{ fois}} = \underbrace{\exp(1/n) \dots \exp(1/n)}_{m \text{ fois}} = \exp(m/n),$$

et pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $e^{-r} = 1/e^r = 1/\exp(r) = \exp(-r)$, par (7.10). On a donc bien $e^r = \exp(r)$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$. ♦

On utilise maintenant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x . On peut alors **définir**, grâce à la continuité de $\exp$,

$$e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} e^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(r_n) = \exp(x).$$

Ceci étant établi, nous pourrions désormais utiliser de manière équivalente les notation e^x et $\exp(x)$.

Le résultat suivant clôt la discussion amorcée par la définition (7.8) et peut être fort utile dans certains calculs de limite.

7.3.3 Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (7.12)$$

Démonstration Nous commençons par prouver (7.12) pour $x = r \in \mathbb{Q}$. Si $r = 0$, le résultat est trivial. Supposons donc que $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et soit $s_n = n/r \in \mathbb{Q}$. On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{s_n \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{s_n}\right)^{s_n r} = \lim_{s_n \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{s_n}\right)^{s_n}\right]^r,$$

où $\pm$ est le signe de r . Par continuité de la fonction $t \mapsto t^r$ au point $t = e$, il suffit donc pour conclure de montrer que

$$\lim_{\mathbb{Q} \ni s \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = e. \quad (7.13)$$

Commençons par le cas $s \rightarrow +\infty$. Il existe alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ un entier m tel que $m \leq s < m+1$, d'où l'on déduit aisément que

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Par conséquent, comme $m \rightarrow +\infty$ lorsque $s \rightarrow +\infty$, et que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = e,$$

on a bien

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = e.$$

Pour traiter le cas $s \rightarrow -\infty$, on pose $s = -(t+1)$, $\mathbb{Q} \ni t \rightarrow +\infty$, et il vient

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = e. \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé (7.12) pour $x \in \mathbb{Q}$.

Supposons maintenant que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit $\varepsilon > 0$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité de e^x , il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que

$$r_1 < x < r_2 \quad \text{et} \quad e^{r_2} - e^{r_1} < \varepsilon.$$

Le premier couple d'inégalité ci-dessus entraîne

$$\left(1 + \frac{r_1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{r_2}{n}\right)^n \quad (7.14)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si $x > 0$, pour tout n assez grand si $x < 0$ (il suffit d'avoir $n > |r_1|$ pour que les trois parenthèses ci-dessus soient > 0). Par conséquent,

$$e^{r_1} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{r_2},$$

d'où

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ existe et l'on déduit de (7.14) que

$$e^{r_1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{r_2}$$

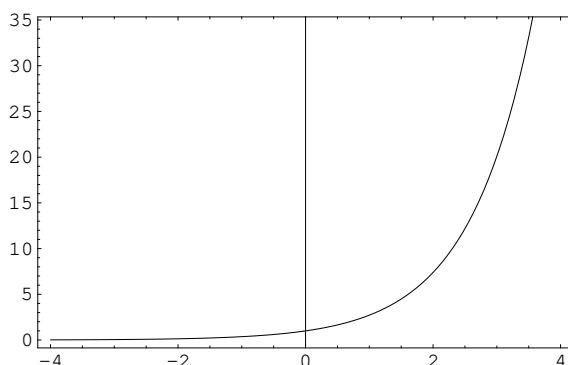
pour tout couple de rationnels r_1, r_2 tels que $r_1 < x < r_2$. Il suffit alors d'invoquer à nouveau la continuité de e^x pour conclure la démonstration. ♦

7.3.4 Etude de la fonction exponentielle

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Limites aux bornes du domaine Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x / x^\alpha = \infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

FIGURE 7.1 – Représentation graphique de la fonction exponentielle e^x .

- Si $\alpha > 0$, posons $n = [\alpha] + 1$. Alors pour $x > 0$ on a en utilisant (7.7) :

$$\frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty).$$

- Si $\alpha = 0$, $e^x > x \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty. \quad (7.15)$$

D'autre part, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0. \quad (7.16)$$

- Si $\alpha < 0$, il est évident que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x x^{-\alpha} = \infty$.

On exprime souvent cette propriété importante en disant que “l'exponentielle domine le polynôme”.

Dérivées première et seconde Puisque

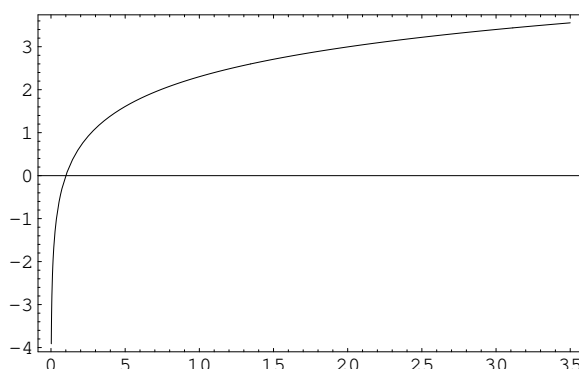
$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (7.17)$$

on a immédiatement que la fonction exponentielle est strictement croissante et strictement convexe. Notez que l'étude de la dérivée seconde n'est ici pas nécessaire dans la mesure où la croissance et les limites (7.15) et (7.16) suffisent à déterminer l'allure de la représentation graphique (Fig. 7.1).

7.3.5 Définition (*fonction logarithme naturel*)

La fonction exponentielle étant une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $(0, \infty)$, elle admet une fonction inverse continue notée

$$\begin{aligned} \ln : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \ln(x), \end{aligned}$$

FIGURE 7.2 – Représentation graphique du logarithme naturel $\ln(x)$.

et appelée *logarithme naturel* (ou *népérien*).

En utilisant les identités

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \forall x \in (0, \infty),$$

et

$$\ln(e^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

on obtient par des calculs simples les propriétés suivantes.

7.3.6 Proposition

- (i) $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$,
- (ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$, pour tous $x, y \in (0, \infty)$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$,
- (iv) $\ln'(x) = 1/x$, pour tout $x \in (0, \infty)$.

Démonstration Laissée en exercice. ♦

On déduit aisément des propriétés (iii) et (iv) la représentation graphique du logarithme (Fig. 7.2) que l'on pouvait aussi trouver directement en effectuant une symétrie d'axe $y = x$ à partir de celle de la fonction exponentielle.

Nous avons déjà utilisé plusieurs fois des fonctions puissance dans ce cours ; il est maintenant temps de les définir rigoureusement.

7.3.7 Définition (*fonction puissance*)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la *fonction puissance* par

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

On a alors les propriétés suivantes.

7.3.8 Proposition

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, y > 0$, on a

- (i) $x^\alpha > 0$,
- (ii) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$,
- (iii) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$,
- (iv) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$,
- (v) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$,
- (vi) $(x/y)^\alpha = x^\alpha / y^\alpha$,
- (vii) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
- (viii) Si $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, alors x^α est convexe.
- (ix) Si $\alpha \in (0, 1)$, alors x^α est concave.
- (x) Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = 0$.
- (xi) Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty$.
- (xii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)/x^\alpha = 0$, pour tout $\alpha > 0$,
- (xiii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$, pour tout $\alpha > 0$.

Démonstration Les propriétés (i)-(vii) se déduisent facilement des définitions.

(viii) Un simple calcul montre que si $f(x) = x^\alpha$, alors $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. Alors si $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, on va avoir que $\alpha(\alpha - 1) \geq 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0$, d'où la convexité de f .

(ix) En revanche, si $\alpha \in (0, 1)$, on a que $f''(x) < 0$, ce qui montre que f est concave.

(x)-(xi) On a pour les limites en 0^+ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\alpha \ln(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{\alpha y} = \begin{cases} \infty, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

et pour les limites en ∞ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha \ln(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} e^{\alpha y} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ \infty, & \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(xii) En appliquant la règle de l'Hospital, on obtient, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{e^{\alpha \ln(x)}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\alpha y}} = 0.$$

(xiii) Finalement, la limite en 0^+ donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \ln\left(\frac{1}{y}\right) = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(y)}{y^\alpha} = 0,$$

ce qui achève la démonstration. ♦

7.3.9 Définition (fonction exponentielle de base a)

Soit $a > 0$. On définit la fonction exponentielle de base a par

$$a^x := (e^x)^{\ln(a)} = e^{x \ln(a)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La proposition suivante établit ses propriétés les plus importantes.

7.3.10 Proposition

Soit $a, b > 0$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

- (i) $a^x > 0$,
- (ii) $a^0 = 1$,
- (iii) $a^{x+y} = a^x a^y$,
- (iv) $(ab)^x = a^x b^x$,
- (v) $\ln(a^x) = x \ln(a)$,
- (vi) $(a^x)' = \ln(a) a^x$.
- (vii) Si $0 < a < 1$, la fonction a^x est décroissante, convexe, et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0.$$

De plus, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = 0.$$

- (viii) Si $a > 1$, la fonction a^x est croissante, convexe, et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

De plus, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Démonstration Le lecteur montrera facilement cette proposition en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle de base e . ♦

Nous donnons à la figure 7.3 la représentation graphique de la fonction a^x pour différentes valeurs de a .

La fonction a^x étant soit strictement monotone décroissante, soit strictement monotone croissante, c'est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $(0, \infty)$. Il existe donc une fonction inverse continue notée

$$\begin{aligned} \log_a : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \log_a(x), \end{aligned}$$

et appelée *logarithme de base a* .

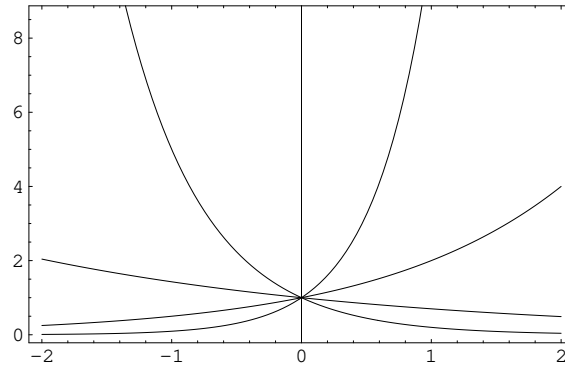


FIGURE 7.3 – Représentation graphique de la fonction a^x pour différentes valeurs de a (décroissante pour $a < 1$).

Pour $x > 0$, on a immédiatement que

$$y = \log_a(x) \iff x = a^y = e^{y \ln(a)} \iff \ln(x) = y \ln(a),$$

d'où

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad x > 0. \quad (7.18)$$

A nouveau, la représentation graphique de la fonction $\log_a(x)$ se déduit de celle de a^x par une symétrie d'axe $y = x$.

7.3.11 Fonctions trigonométriques

En analyse complexe, on définit également la fonction exponentielle par

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad x, y \in \mathbb{R}),$$

où la série converge absolument uniformément (au sens complexe, i.e. en remplaçant la valeur absolue par le module). Si l'on pose $z = ix$, pour $x \in \mathbb{R}$, on va avoir

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

où la permutation des termes est à nouveau justifiée par le lemme 3.3.1, ou plutôt par sa forme généralisée à l'analyse complexe.

Remarquant que $i^{2n} = (-1)^n$, et que $i^{2n+1} = (-1)^n i$, il vient

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (7.19)$$

On constate alors que les deux séries figurant dans le membre de droite de cette expression ne sont autres que les séries de Taylor des fonctions *cosinus* et *sinus*. Explicitement :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad (7.20)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad (7.21)$$

résultat que l'on déduit aisément des considérations de la section 7.2 et de notre connaissance a priori des fonctions trigonométriques. (Notez qu'en vertu du Théorème 7.2.3 et de l'exemple 7.2.8 (iii) et (iv), les deux séries sont absolument uniformément convergentes, sur tout intervalle fermé.)

L'identité (7.19) s'écrit alors

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (7.22)$$

Nous avons supposé jusqu'ici que le lecteur est familier avec la définition des fonctions trigonométriques “sur le cercle trigonométrique”, définition permettant d'obtenir les identités (7.20) et (7.21). Il est pourtant préférable, notamment en vue de généraliser à l'analyse complexe, de prendre pour définition les égalités (7.20) et (7.21), ou encore, ce qui est équivalent,

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notez que ces définitions, introduites par Euler, permettent de s'affranchir de toute considération géométrique.

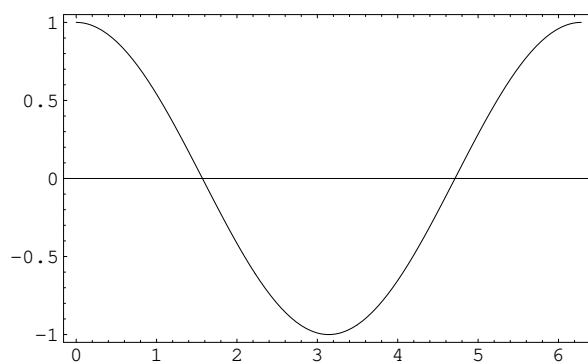
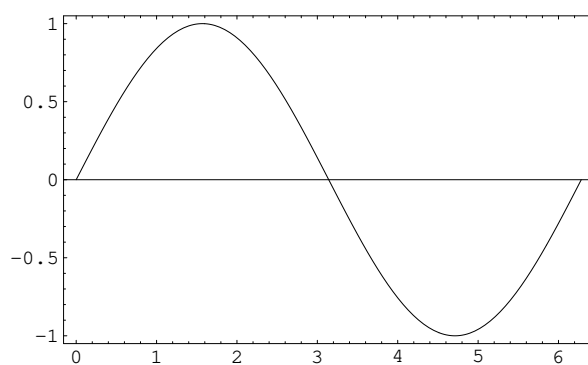
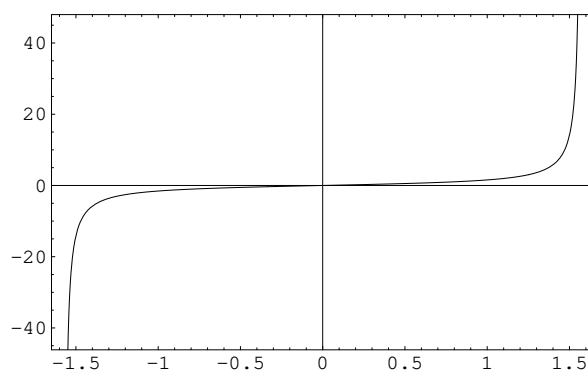
Nous laissons à la lectrice, si elle le souhaite, le soin de faire une étude détaillée des fonctions cosinus et sinus, dont nous donnons les représentations graphiques (Fig. 7.4-5), ainsi que celle de la fonction *tangente* (Fig. 7.6) définie par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7.3.12 Fonctions hyperboliques

Nous définissons les fonctions hyperboliques *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* par

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

FIGURE 7.4 – Représentation graphique de la fonction $\cos(x)$.FIGURE 7.5 – Représentation graphique de la fonction $\sin(x)$.FIGURE 7.6 – Représentation graphique de la fonction $\tan(x)$.

La *tangente hyperbolique* est alors définie par $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous avons les analogies suivantes avec les fonctions trigonométriques :

$$\begin{array}{ll}
 \cos'(x) = -\sin(x) & \cosh'(x) = \sinh(x) \\
 \sin'(x) = \cos(x) & \sinh'(x) = \cosh(x) \\
 \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 & \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \\
 \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
 \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 (a \cos(t), b \sin(t)) \quad \text{“ellipse”} & (a \cosh(t), b \sinh(t)) \quad \text{“hyperbole”}
 \end{array}$$

7.3.13 Etude de la fonction $\sinh(x)$

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Parité La fonction est impaire. On l'étudie donc sur $[0, \infty)$.

Limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \infty$$

Dérivées première et seconde On a que $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui montre que $\sinh(x)$ est strictement croissante.

D'autre part, $\sinh''(x) = (\sinh'(x))' = (\cosh(x))' = \sinh(x)$, et on a donc un unique point d'inflexion en $\sinh(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. En remarquant que

$$\sinh(1) = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^2 - 1}{e} > 0,$$

on en déduit que $\sinh(x) > 0$, pour tout $x > 0$. Ainsi $\sinh(x)$ est convexe sur $(0, \infty)$.

Remarquons encore que $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$, ce qui montre que la tangente à l'origine est d'équation $y = x$.

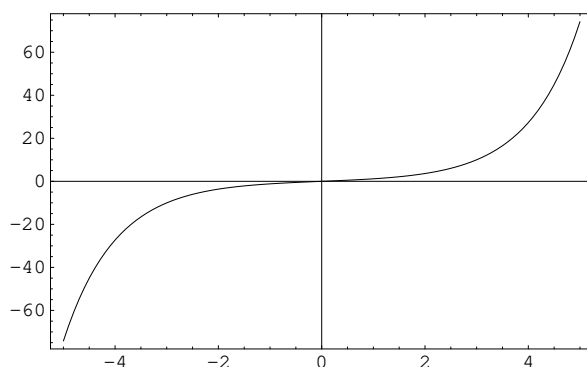
Ces considérations permettent d'établir la représentation graphique donnée à la figure 7.7.

Puisque $\sinh(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une fonction inverse notée

$$\begin{aligned}
 \operatorname{argsinh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\
 x &\longmapsto \operatorname{argsinh}(x),
 \end{aligned}$$

et caractérisée par

$$y = \operatorname{argsinh}(x) \iff \sinh(y) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

FIGURE 7.7 – Représentation graphique de la fonction $\sinh(x)$.

De la formule (5.3) donnant la dérivée de la fonction inverse, on obtient

$$\operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

qui est analogue à $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ (exemple 5.1.10 (iii)).

7.3.14 Etude de la fonction $\cosh(x)$

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Parité La fonction est paire. On l'étudie donc sur $[0, \infty)$.

Limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \infty$$

Dérivées première et seconde De $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\cosh''(x) = \cosh(x)$, on déduit que $\cosh(x)$ est strictement convexe et strictement croissante sur $[0, \infty)$.

Notant encore que $\cosh(0) = 1$ est le minimum de la fonction, on donne sa représentation graphique à la figure 7.8.

La fonction $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ étant bijective, elle admet une fonction inverse, notée

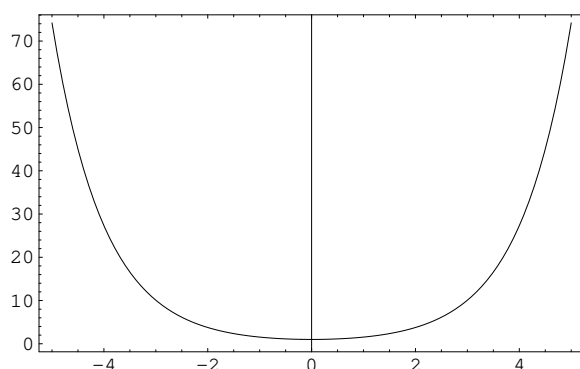
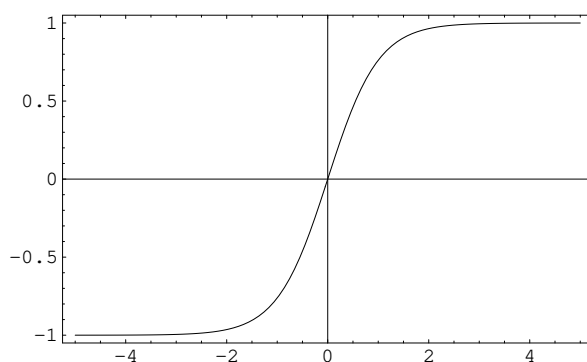
$$\begin{aligned} \operatorname{argcosh} : [1, \infty) &\longrightarrow [0, \infty), \\ x &\longmapsto \operatorname{argcosh}(x), \end{aligned}$$

et définie par

$$y = \operatorname{argcosh}(x) \iff \cosh(y) = x, \quad \forall x \in [1, \infty).$$

On trouve pour la dérivée

$$\operatorname{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x \in [1, \infty).$$

FIGURE 7.8 – Représentation graphique de la fonction $\cosh(x)$.FIGURE 7.9 – Représentation graphique de la fonction $\tanh(x)$.

7.3.15 Etude de la fonction $\tanh(x)$

Domaine de définition $\mathbb{R}$

Parité La fonction est impaire. On l'étudie donc sur $[0, \infty)$.

Limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

Dérivées première et seconde Puisque

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = 1/\cosh^2(x) > 0, \quad \forall x \in [0, \infty),$$

on a que $\tanh(x)$ est strictement croissante sur ce domaine. (Notez que l'existence d'une asymptote horizontale nous dispense ici de l'étude de la dérivée seconde.) D'autre part, on a une tangente à l'origine d'équation $y = x$.

On obtient immédiatement la représentation graphique de $\tanh(x)$ (Fig. 7.9).

Puisque $\tanh(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $(-1, 1)$, il existe une fonction inverse

notée

$$\begin{aligned}\operatorname{argtanh} : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \operatorname{argtanh}(x),\end{aligned}$$

et définie par

$$y = \operatorname{argtanh}(x) \iff \tanh(y) = x, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Sa dérivée est donnée par

$$\operatorname{argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1). \quad (7.23)$$

On peut exprimer les fonctions hyperboliques inverses en fonction du logarithme naturel.

7.3.16 Proposition

- (i) $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,
- (ii) $\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$,
- (iii) $\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Démonstration Nous donnons la démonstration de (i), les autres formules s'établissant de manière analogue. Pour $y \in \mathbb{R}$, posons $y = \operatorname{argsinh}(x) \iff x = \sinh(y)$ et $u = e^y$, d'où $x = (u - 1/u)/2$. Résolvant par rapport à u , il vient

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \\ \iff u^2 - 2xu - 1 &= 0 \\ \iff (u-x)^2 &= 1+x^2 \\ \iff u &= x \pm \sqrt{1+x^2}.\end{aligned}$$

Mais comme $u = e^y > 0$, on choisit la solution positive, d'où

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2} \iff y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Ainsi, $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. ♦

Chapitre 8

Intégration

La nécessité d'une théorie rigoureuse de l'intégration est apparue suite à un certain nombre de problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique. Il était notamment question de développer une théorie indépendante de la notion de dérivée. Nous présentons ici la théorie dite de l'intégrale de Riemann, dont les idées essentielles ont été introduites dans la première moitié du XIX^{ème} siècle par Cauchy et Riemann.

Par la suite (début XX^{ème}), une théorie plus générale a été développée par Lebesgue, dont le but initial était de résoudre le problème que la théorie de Cauchy-Riemann avait soulevé : celui de la dérivation de l'intégrale, considérée comme fonction de la borne supérieure d'intégration. Lebesgue donne un nom, celui d'ensemble de mesure nulle, au phénomène que Riemann avait rencontré : une fonction est intégrable au sens de Riemann si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure (de Lebesgue) nulle. Le concept d'ensemble de mesure nulle est au coeur de la théorie de Lebesgue, théorie majoritairement utilisée en mathématique et en physique mathématique. Ce sujet d'étude, lié à la théorie de la mesure, sort du cadre de ce cours. Néanmoins, nous mentionnerons çà et là dans le texte l'importance de ces idées en comparaison avec la théorie développée ici. Dans la pratique, lorsqu'il s'agit de calculer des intégrales, c'est souvent la théorie de Riemann qui s'avère utile, mais du point de vue conceptuel, la théorie de Lebesgue est plus profonde car fortement liée à la théorie de la classification des fonctions et des ensembles, principalement développée par Baire et Borel fin XIX^{ème} / début XX^{ème}. Ces sujets pourront être étudiés dans des cours d'analyse plus avancés. Le présent chapitre, qui se focalise sur l'intégrale de Riemann, vous propose une première théorie rigoureuse de l'intégration.

8.1 Intégrale définie

La notion d'intégrale définie est un outil puissant permettant notamment de calculer des longueurs d'arcs, des aires et des volumes. Elle intervient essentiellement dans toute théorie physique et permet, pour ne citer que quelques exemples élémentaires, de calculer le travail d'une force connaissant la dynamique du système, le flux d'un champ magnétique à travers une surface ou encore l'expression du champ électrique en tout point connaissant la distribution de charges. Elle a également une importance fondamentale en théorie des probabilités et dans nombre de domaines des mathématiques pures.

8.1.1 Définition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On appelle *subdivision* de $[a, b]$ une collection ordonnée finie de réels $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

On notera

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Soit maintenant $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On associe à chaque subdivision σ de $[a, b]$ les nombres

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ M_i &= \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ \underline{S}(f, \sigma) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad \overline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \end{aligned}$$

$\underline{S}(f, \sigma)$ et $\overline{S}(f, \sigma)$ sont respectivement appelés *sommes de Darboux inférieure et supérieure* associées à la partition σ . On définit alors

$$\underline{S} = \sup \underline{S}(f, \sigma) \quad \overline{S} = \inf \overline{S}(f, \sigma),$$

le supremum et l'infimum étant pris sur toutes les subdivisions σ de $[a, b]$.

Dans le cas où ces deux nombres sont égaux, on dit que f est *intégrable au sens de Riemann* ou *Riemann-intégrable* sur $[a, b]$, et on note

$$\int_a^b f, \tag{8.1}$$

ou encore

$$\int_a^b f(x) dx, \tag{8.2}$$

la valeur commune de $\underline{S} = \overline{S}$. Ce nombre est alors appelé *l'intégrale de Riemann* de f sur $[a, b]$. La fonction f apparaissant dans l'intégrale s'appelle *intégrande* (nom masculin). Les nombres a, b sont les *bornes d'intégration*.

8.1.2 Exemples

(i) La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas bornée, donc pas intégrable au sens de Riemann. On remarque que, pour toute subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[0, 1]$,

$$M_1 = \sup\{f(x); x \in [x_0, x_1]\} = +\infty,$$

en particulier $\overline{S}(f, \sigma)$ n'est pas définie.

(ii) La fonction constante $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$ est intégrable, avec

$$\int_0^1 f = 1.$$

En effet, considérons une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[0, 1]$. Comme f est identiquement égale à 1, on a que $m_i = M_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi,

$$\underline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = x_n - x_0 = 1, \quad \overline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = x_n - x_0 = 1.$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision σ de $[0, 1]$, on conclut que f est Riemann-intégrable avec $\int_0^1 f = 1$.

8.1.3 Notations

Avant de poursuivre, il convient de fournir quelques précisions sur les notations. Notre préférence va à (8.1) plutôt qu'à (8.2), la lettre x apparaissant dans (8.2) comme argument de la fonction n'amenant rien de plus à la signification de (8.1). Il s'agit d'une variable "muette" utilisée pour représenter ce qu'on appelle la "variable d'intégration". Par exemple (8.2) est identique à

$$\int_a^b f(y) dy.$$

On écrit aussi parfois $\int_a^b f dx$ au lieu de $\int_a^b f(x) dx$. L'intégrale dépend de f , a et b mais pas de la variable d'intégration, qui peut donc aussi bien n'être précisée que dans le dx représentant un "petit élément de longueur" Δx .

Le rôle joué par cette variable d'intégration est analogue à celui que tient l'indice de sommation. Les deux écritures

$$\sum_{i=1}^n a_i \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n a_k$$

signifient la même chose, chacune représentant la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Nous discutons maintenant de conditions sous lesquelles une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann. Notons tout d'abord que, puisque f est bornée, il existe deux réels m et M tels que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ainsi, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on a

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, \sigma) \leq \overline{S}(f, \sigma) \leq M(b-a),$$

ce qui montre que les quantités $\underline{S}$ et $\overline{S}$ sont finies. En revanche, la question de savoir si elles coïncident est beaucoup plus délicate. Nous allons démontrer une condition

suffisante d'intégrabilité de f sur $[a, b]$, à savoir : f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si elle est continue. On peut montrer de façon plus générale que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité. Le problème de trouver une condition nécessaire et suffisante est résolu dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue (cf. cours d'analyse 3-4) et on a que les fonctions Riemann-intégrables sont exactement les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure (de Lebesgue) nulle. On dit dans ce cas que f est continue *presque partout*. Les exemples les plus triviaux d'ensembles de mesure nulle sont les ensembles *au plus dénombrables*, i.e. finis ou dénombrables. Cependant, il existe des ensembles de mesure nulle non-dénombrables et, dans ce contexte, la théorie de Lebesgue s'impose naturellement.

Pour ce qui nous concerne, nous garderons à l'esprit que, pour l'intégrale de Riemann, "un nombre fini de points n'importe pas". D'autre part, dans ce qui suit, s'il n'y pas d'ambiguïté possible nous dirons simplement intégrable pour Riemann-intégrable.

8.1.4 Exemple

(i) La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (0, 1], \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est intégrable, avec

$$\int_0^1 f = 0.$$

Pour s'en convaincre, considérons une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[0, 1]$. Comme $f(x) = 0$ pour $x > 0$, on a que $m_i = M_i = 0$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$. Pour $i = 1$, on obtient

$$m_1 = \inf\{f(x); x \in [0, x_1]\} = 0 \quad \text{et} \quad M_1 = \sup\{f(x); x \in [0, x_1]\} = 1.$$

Ainsi,

$$\underline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0, \quad \overline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = M_1(x_1 - x_0) = x_1.$$

Par conséquent, prenant l'infimum sur toutes les subdivisions σ de $[0, 1]$,

$$\underline{S} = 0, \quad \overline{S} = \inf_{0 < x_1 < 1} x_1 = 0,$$

d'où la conclusion.

Un argument similaire montre que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors f est intégrable et $\int_a^b f = 0$.

(ii) La fonction de Dirichlet $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est pas intégrable au sens de Riemann. En effet, puisque tout sous-intervalle de $[0, 1]$ de longueur non-nulle contient au moins un rationnel et un irrationnel, on obtient pour toute subdivision σ de $[0, 1]$ que $m_i = 0$ et $M_i = 1$ pour tout i , d'où $\underline{S}(f, \sigma) = 0$ et $\overline{S}(f, \sigma) = 1$. Par conséquent, $\underline{S} = 0$ et $\overline{S} = 1$, donc f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Comme discuté ci-dessus, vous verrez dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue (cf. analyse 3-4) que f est intégrable au sens de Lebesgue, avec $\int_0^1 f = 0$ (car $f \equiv 0$ sauf sur l'ensemble de mesure nulle $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$).

8.1.5 Définition

Etant donné deux subdivisions σ et τ d'un même segment $[a, b]$, on dit que τ est *plus fine* que σ si $\tau \supset \sigma$, autrement dit, si tout point de σ est un point de τ . Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions, leur réunion est notée $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

8.1.6 Lemme

Si τ est plus fine que σ , alors

$$\underline{S}(f, \sigma) \leq \underline{S}(f, \tau) \quad (8.3)$$

et

$$\overline{S}(f, \tau) \leq \overline{S}(f, \sigma). \quad (8.4)$$

Démonstration Pour établir (8.3), supposons d'abord que τ contienne seulement un point de plus que σ . Notons ce point supplémentaire $\tilde{x}$ et supposons le strictement compris entre deux points consécutifs x_{i-1} et x_i de σ . On pose alors

$$w_1 = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, \tilde{x}]\},$$

$$w_2 = \inf\{f(x); x \in [\tilde{x}, x_i]\}.$$

On a clairement $w_1 \geq m_i$ et $w_2 \geq m_i$, où m_i est défini comme ci-dessus. On obtient donc dans la différence $\underline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \sigma)$ seulement trois termes non nuls :

$$\begin{aligned} & w_1(\tilde{x} - x_{i-1}) + w_2(x_i - \tilde{x}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (w_1 - m_i)(\tilde{x} - x_{i-1}) + (w_2 - m_i)(x_i - \tilde{x}) \geq 0. \end{aligned}$$

Si τ contient k points de plus que σ , on répète k fois ce raisonnement pour aboutir à (8.3). On démontre (8.4) de façon analogue. ♦

8.1.7 Proposition

$$\underline{S} \leq \overline{S}$$

Démonstration Notons σ la réunion de deux subdivisions σ_1 et σ_2 . Le théorème précédent donne

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leq \underline{S}(f, \sigma) \leq \overline{S}(f, \sigma) \leq \overline{S}(f, \sigma_2),$$

d'où

$$\underline{S}(f, \sigma_1) \leq \overline{S}(f, \sigma_2). \quad (8.5)$$

Pour σ_2 fixé, prenant dans (8.5) le sup sur tous les σ_1 , il vient

$$\underline{S} \leq \overline{S}(f, \sigma_2). \quad (8.6)$$

On conclut en prenant dans (8.6) l'inf sur tout les σ_2 . ♦

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section.

8.1.8 Théorème

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $\eta > 0$ tel que

$$(b - a)\eta < \varepsilon.$$

Le théorème de la continuité uniforme (4.5.5) nous dit que f est uniformément continue sur $[a, b]$ et il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in [a, b] \text{ et } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \eta. \quad (8.7)$$

Si σ est une subdivision de $[a, b]$ telle que $\Delta x_i < \delta$ pour tout i , alors (8.7) implique

$$M_i - m_i < \eta, \quad i = 1, \dots, n,$$

d'où

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \eta \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \eta(b - a) < \varepsilon.$$

Alors les inégalités

$$\underline{S}(f, \sigma) \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}(f, \sigma)$$

impliquent que

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon.$$

Le nombre ε pouvant être choisi arbitrairement petit, ceci achève la démonstration. ♦

8.1.9 Remarque

De la preuve ci-dessus, nous déduisons le *critère d'intégrabilité de Cauchy* : une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition σ de $[a, b]$ telle que $\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon$. La réciproque de cette proposition est aussi vraie (cf. exercices) : on a donc en fait ci-dessus un “si et seulement si” et une caractérisation complète des fonctions intégrables par ce critère.

8.1.10 Théorème

(i) Si f, f_1 et f_2 sont Riemann-intégrables, alors $f_1 + f_2$ et cf le sont aussi, pour toute constante c . De plus,

$$\int_a^b (f_1 + f_2) dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx,$$

et

$$\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx.$$

(ii) Si $f_1 \leq f_2$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f_1 dx \leq \int_a^b f_2 dx.$$

(iii) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $a < c < b$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx.$$

(iv) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $|f(x)| \leq M$, alors

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq M(b - a).$$

Démonstration Il découle des définitions que si $f = f_1 + f_2$ et si σ est une subdivision de $[a, b]$, on a

$$\begin{aligned} \underline{S}(f_1, \sigma) + \underline{S}(f_2, \sigma) &\leq \underline{S}(f, \sigma) \leq \overline{S}(f, \sigma) \\ &\leq \overline{S}(f_1, \sigma) + \overline{S}(f_2, \sigma). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Si f_1 et f_2 sont intégrables, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe deux subdivisions σ_1 et σ_2 telles que

$$\overline{S}(f_j, \sigma_j) - \underline{S}(f_j, \sigma_j) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, 2.$$

Ces inégalités sont encore satisfaites si on remplace σ_1 et σ_2 par leur réunion σ . Alors les inégalités (8.8) impliquent

$$\overline{S}(f, \sigma) - \underline{S}(f, \sigma) < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de f .

Considérant la même subdivision σ , on va avoir

$$\overline{S}(f_j, \sigma) < \int f_j dx + \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, 2,$$

et (8.8) implique

$$\int f dx \leq \overline{S}(f, \sigma) < \int f_1 dx + \int f_2 dx + \varepsilon.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on conclut que

$$\int f dx \leq \int f_1 dx + \int f_2 dx.$$

On démontre l'inégalité inverse en remplaçant f_1 et f_2 par $-f_1$ et $-f_2$, ce qui achève de prouver la première partie du point (i).

Les autres assertions du théorème se démontrant de façon analogue, elles sont laissées au soin du lecteur. Pour démontrer (iii), il suffit de ne considérer que des subdivisions contenant le point c . ♦

8.1.11 Remarque

- (i) On montre aisément, à l'aide de la partie (i) du théorème 8.1.10, que les fonctions intégrables forment un espace vectoriel réel. En particulier, la classe des fonctions continues en sont un sous-espace vectoriel.
- (ii) Le point (ii) du théorème implique, en particulier, que l'intégrale d'une fonction positive est positive.
- (iii) La partie (iii) du théorème 8.1.10 suggère de définir $\int_b^a f dx$, même si $a < b$, de la façon suivante :

$$\int_a^b f dx + \int_b^a f dx = \int_a^a f dx = 0,$$

d'où

$$\int_b^a f dx = - \int_a^b f dx,$$

l'idée sous-jacente étant que l'on parcourt l'intervalle $[a, b]$ "en sens inverse", d'où le changement de signe. La notion de sens de parcours prend toute son importance en analyse vectorielle, dans la théorie des intégrales curvilignes.

- (iv) Notons que pour une fonction f positive et intégrable sur un segment $[a, b]$, on peut interpréter géométriquement $\int_a^b f dx$ comme étant l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe $y = 0$ et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$. Dans cet ordre d'idée, il apparaît clairement que pour toute fonction f impaire,

$$\int_{-a}^a f dx = 0,$$

et, pour toute fonction g paire,

$$\int_{-a}^a g dx = 2 \int_0^a g dx.$$

Ces résultats sont une conséquence immédiate du théorème du changement de variable qui sera présenté ultérieurement.

8.1.12 Théorème

(i) Si f est intégrable, alors $|f|$ l'est aussi et

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx, \quad (8.9)$$

(ii) Si f est continue sur $[a, b]$ et telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et si $\int_a^b f dx = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $[a, b]$.

(iii) Si f et g sont continues, alors

$$\left(\int_a^b f g dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx. \quad (8.10)$$

De plus, on a égalité dans (8.10) si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f = \mu g$.

Démonstration L'assertion f intégrable $\Rightarrow |f|$ intégrable est non triviale et ne sera pas démontrée ici (cf. Rudin, théorème 6.11 pour un résultat plus général).

Pour démontrer (8.9), choisissons $c = \pm 1$ de sorte que

$$c \int_a^b f dx \geq 0.$$

Alors

$$\left| \int_a^b f dx \right| = c \int_a^b f dx = \int_a^b c f dx \leq \int_a^b |f| dx,$$

puisque $cf \leq |f|$.

Nous prouvons (ii) par contraposition. Supposons qu'il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que $f(\tilde{x}) > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, la continuité de f implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in [a, b] \text{ et } |x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon \implies f(x) > f(\tilde{x}) - \varepsilon.$$

Comme $f \geq 0$ sur $[a, b]$, le théorème 8.1.10 entraîne

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{\tilde{x}-\delta}^{\tilde{x}+\delta} f(x) dx \geq 2\delta(f(\tilde{x}) - \varepsilon). \quad (8.11)$$

Le nombre ε pouvant être choisi arbitrairement petit, (8.11) implique

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Pour (iii), remarquons tout d'abord que, si l'une des deux fonctions f, g est identiquement nulle, (8.10) est trivial. Supposons donc, sans perte de généralité, que $f \not\equiv 0$ et $g \not\equiv 0$. Posons

$$A = \int_a^b g^2 dx, \quad B = 2 \int_a^b f g dx, \quad C = \int_a^b f^2 dx.$$

Par le point (ii), on remarque que $A > 0$ (et $C > 0$). Considérons alors le polynôme dans la variable $\lambda \in \mathbb{R}$ défini par

$$P(\lambda) = \int_a^b (f + \lambda g)^2 dx = A\lambda^2 + B\lambda + C.$$

Clairement, $P(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\Delta := B^2 - 4AC \leq 0$, ce qui est précisément l'inégalité (8.10). De plus, si l'on a égalité dans (8.10), alors $\Delta = 0$ et $P(-B/2A) = 0$, ce qui s'écrit

$$\int_a^b \left(f - \frac{B}{2A}g \right)^2 dx = 0.$$

Par le point (ii), on déduit que $f - (\frac{B}{2A})g \equiv 0$ sur $[a, b]$. ♦

8.1.13 Remarque

L'inégalité (8.10) s'appelle **inégalité de Cauchy-Schwarz**. C'est une propriété fondamentale du *produit scalaire* défini sur l'espace vectoriel $C^0([a, b], \mathbb{R})$ par

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b fg dx,$$

pour tout $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. On vérifie alors que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^0([a, b], \mathbb{R}) \times C^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire (linéaire dans chaque argument), symétrique ($\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$) et positive définie, i.e. $\langle f, f \rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $f = 0$.¹

On définit aussi sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$ la norme

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \tag{8.12}$$

pour tout $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Sous cette forme générale, l'inégalité est vraie pour tout produit scalaire, avec la norme correspondante définie par (8.12). (Pensez par exemple au produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, avec la norme euclidienne.)

Notre prochain résultat est la version calcul intégral du théorème des accroissements finis (corollaire 5.2.4).

1. Nous écrivons ici $f = 0$ au lieu de $f \equiv 0$ pour indiquer l'élément neutre de l'espace vectoriel, qui est la fonction identiquement nulle.

8.1.14 Théorème de la moyenne

Si f est continue sur $[a, b]$, $a < b$, alors il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f dx = f(\tilde{x}). \quad (8.13)$$

Démonstration Posons

$$m = \min\{f(x); x \in [a, b]\}$$

et

$$M = \max\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Il suffit alors de constater que

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow \quad m(b-a) &\leq \int_a^b f dx \leq M(b-a) \\ \Rightarrow \quad m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx \leq M \end{aligned}$$

et d'utiliser le théorème de la valeur intermédiaire (4.4.3) pour conclure. ♦

8.1.15 Remarque

Le membre de gauche de (8.13) s'appelle *moyenne de f sur $[a, b]$* .

8.2 Intégrale indéfinie, théorème fondamental

Nous allons à présent établir le lien entre les notions d'intégrale définie et de dérivée. On dit souvent que l'intégration est l'“opération inverse” de la dérivation, en un sens qui sera précisé dans cette section. Le théorème majeur qui décrit la relation entre les deux concepts est connu sous le nom de *théorème fondamental de l'analyse*. Nous verrons que le concept de primitive, “antiderivative”, comme disent explicitement les anglophones, permet dans la pratique de calculer la valeur de certaines intégrales définies.

8.2.1 Motivation

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, définissons une nouvelle fonction F par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (8.14)$$

Notez qu'il est commode ici d'introduire explicitement la variable d'intégration t pour éviter toute confusion avec la variable x .

Pour tout $x \in [a, b]$ fixé, nous avons alors que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Ainsi, par le théorème de la moyenne, il existe un point $\tilde{x}_h$ entre x et $x+h$ tel que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\tilde{x}_h).$$

Puisque $\tilde{x}_h \rightarrow x$ lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient alors, par continuité de f ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\tilde{x}_h) = f(x).$$

Ceci montre que la fonction F satisfait la relation fondamentale²

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

8.2.2 Définition

Soit f une fonction définie sur $D(f) \subset \mathbb{R}$. On dit que la fonction F est une *primitive* de f si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D(f)$. On appelle *intégrale indéfinie* de f et on note

$$\int f dx$$

l'ensemble de toutes les primitives de f sur le domaine $D(f)$.

8.2.3 Proposition

Soit f une fonction définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

- (i) Si F est une primitive de f sur E , alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est aussi une primitive de f sur E .
- (ii) Supposons maintenant f continue et que E est un intervalle. Si F et G sont deux primitives de f sur E , alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F \equiv G + c$.

Démonstration (i) est trivial. Pour prouver (ii), observons que $F' \equiv G'$ sur E ssi $(F - G)' \equiv 0$ sur E . Comme E est un intervalle, il existe une unique constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F - G \equiv c$ sur E . ♦

2. Notez que pour $x = a$ (resp. $x = b$), cette relation doit être entendue au sens d'une dérivée à droite (resp. à gauche).

8.2.4 Remarque

Le point (ii) de la proposition 8.2.3 est mis en défaut si E n'est pas un intervalle. On peut le voir en considérant l'exemple suivant : $E = (0, 1) \cup (2, 3)$ et $f \equiv 0$ sur E . Alors, les fonctions F et G définies sur E par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \in (2, 3), \end{cases}$$

et $G \equiv 0$ satisfont $F' \equiv G' \equiv 0$ sur E , mais elles diffèrent d'une constante différente sur les intervalles $(0, 1)$ et $(2, 3)$. (Que F et G ne diffèrent pas d'une constante globale sur tout le domaine E provient du fait que E n'est pas *connexe*, cf. cours d'analyse 2 et 3.)

8.2.5 Théorème fondamental

Si f est continue sur $[a, b]$ et que F est une primitive de f sur cet intervalle, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration Nous avons vu au paragraphe 8.2.1 que la fonction G définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

est une primitive de f sur le domaine $[a, b]$. Ainsi, pour toute primitive F de f sur $[a, b]$, il existe une constante c telle que $F = G + c$. Alors,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= G(b) + c - G(a) - c = G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

8.2.6 Remarque

- (i) Le théorème est, dans la pratique, un outil puissant permettant de calculer de nombreuses intégrales définies.
- (ii) Il est important d'être au clair sur la différence entre intégrale définie et intégrale indéfinie : l'intégrale définie $\int_a^b f dx$ est un nombre qui dépend de f et des bornes d'intégration a, b , alors que l'intégrale indéfinie $\int f dx$ est une famille de primitives de f , i.e. une famille de fonctions définies sur $D(f)$.
- (iii) Notez que, quel que soit le nombre $\tilde{a} \in [a, b]$, la fonction $\tilde{G}(x) = \int_{\tilde{a}}^x f(t)dt$ est une primitive de f . En effet, $\int_{\tilde{a}}^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{\tilde{a}} f(t)dt$ ce qui montre que les deux fonctions G et $\tilde{G}$ ne diffèrent que d'une constante.

- (iv) Bien que toute fonction continue f admette une intégrale indéfinie dont un représentant est donné par (8.14), il n'est pas toujours possible d'exprimer cette primitive au moyen des fonctions élémentaires, même si f est une fonction élémentaire. Ainsi la fonction $f(x) = \exp(-x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de primitive pouvant être écrite en termes d'exponentielles, logarithmes ou de fonctions trigonométriques ou polynomiales. C'est aussi le cas, par exemple, de la fonction g définie par $g(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$, qui, comme nous l'avons vu, est bien continue sur $\mathbb{R}$. Néanmoins, il existe d'autres méthodes permettant de calculer des intégrales définies faisant intervenir ces fonctions (cf. série 15...)

8.3 Techniques d'intégration

Pour utiliser en pratique le théorème fondamental, il est nécessaire de pouvoir rechercher efficacement les primitives des fonctions concernées. L'exercice revient à faire l'opération inverse de la dérivation : chercher une fonction dont la dérivée est une fonction donnée. Pour dériver, nous avons une série de règles à appliquer directement. En revanche, la démarche dite d'intégration demande de l'imagination, de l'habileté technique, beaucoup d'entraînement et surtout, une connaissance approfondie des fonctions élémentaires et de leurs dérivées, de sorte à pouvoir identifier les "dérivées évidentes". On n'arrive pas toujours, en pratique, à identifier au premier coup d'oeil la fonction figurant sous le signe intégrale comme étant la dérivée d'une fonction connue. Heureusement, des techniques existent pour nous aider à nous frayer un chemin dans la recherche de primitive.

8.3.1 Proposition (*intégration par partie*)

Soit u et v deux fonctions continûment dérivables sur un domaine commun E . Nous avons alors la relation suivante entre la primitive de $u'v$ et celle de uv' :

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx. \quad (8.15)$$

D'autre part, si $[a, b] \subset E$, on a

$$\int_a^b uv' dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v dx. \quad (8.16)$$

Démonstration En supposant que u' et v' sont continues, il suffit pour obtenir (8.15) d'intégrer les deux membres de la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions. Puis (8.16) découle de (8.15) par le théorème fondamental. ♦

8.3.2 Exemples

- (i) Cherchons la primitive de $f(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. On applique (8.15) avec

$$u(x) = \arctan(x), \quad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad v'(x) = 1, \quad v(x) = x.$$

(Noter que $v'(x) = 1$ entraîne $v(x) = x + c$ mais que nous avons posé $c = 0$ ci-dessus. Pouvez-vous justifier qu'on ne perd ainsi pas de généralité?)

Il vient alors

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c,$$

où la dernière égalité se trouve par identification d'une dérivée évidente sous le signe intégral du membre de gauche.

- (ii) Pour donner un autre exemple d'application de la proposition 8.3.1, nous allons établir la formule de Taylor avec la forme intégrale du reste, ainsi que la forme de Cauchy du reste. Supposons que f soit une fonction au moins $n+1$ fois continûment différentiable sur un certain voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Pour tout x dans ce voisinage, nous pouvons écrire

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

En appliquant la formule (8.16) aux fonctions

$$\begin{aligned} u(t) = f'(t) &\implies u'(t) = f''(t), \\ v'(t) \equiv 1 &\implies v(t) = t, \end{aligned}$$

nous trouvons que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) + t f'(t) \Big|_a^x - \int_a^x t f''(t) dt \\ &= f(a) + x f'(x) - a f'(a) - \int_a^x t f''(t) dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{x(f'(x) - f'(a))}_{= \int_a^x f''(t) dt} - \int_a^x t f''(t) dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t) dt. \end{aligned}$$

Afin d'évaluer cette nouvelle intégrale, appliquons à présent la proposition 8.2.9 aux fonctions

$$\begin{aligned} u(t) = f''(t) &\implies u'(t) = f'''(t), \\ v'(t) = x-t &\implies v(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t) \right]_a^x - \int_a^x (-1/2)(x-t)^2 f'''(t) dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt. \end{aligned}$$

En procédant par récurrence, on obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la formule de Taylor, mais cette fois le reste est donnée sous forme intégrale. Vérifions que c'est bien un $o(|x-a|^n)$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a-\delta, a+\delta]$. Donc il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta]$,

$$\left| \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \max_{t \in [a-\delta, a+\delta]} |f^{(n+1)}(t)| \left| \int_a^x (x-t)^n dt \right| \leq C|x-a|^{n+1},$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = o(|x-a|^n).$$

Finalement, en appliquant le théorème de la moyenne, on a encore

$$\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{n!} (x-\tilde{x})^n f^{(n+1)}(\tilde{x})(x-a) \text{ pour un } \tilde{x} \text{ entre } x \text{ et } a. \quad (8.17)$$

Le membre de droite de cette identité s'appelle *reste de Cauchy* et fournit plus d'information que le reste de Lagrange dans certaines situations.

La deuxième méthode d'intégration que nous présentons ici est celle du changement de variable. Commençons par motiver la démarche par un exemple. Si l'on considère la fonction

$$g(x) = \ln(\ln(x)), \quad x > 1, \quad (8.18)$$

on voit que

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, \quad x > 1. \quad (8.19)$$

En revanche, étant donné la fonction $f(x) = 1/(x \ln(x))$, il n'est pas du tout évident au premier abord que c'est la dérivée de la fonction (8.18). Une technique très puissante consiste à changer la variable d'intégration, de sorte à faire apparaître une expression plus maniable. Posons, pour $x > 1$,

$$t = \ln(x), \quad \text{d'où } x = e^t \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = e^t, \quad \text{soit} \quad dx = e^t dt.$$

L'intégrale indéfinie

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x \ln(x)} dx,$$

s'écrit alors, en termes de la nouvelle variable t ,

$$\int \frac{1}{te^t} e^t dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(t) + c,$$

où c est une *constante d'intégration* arbitraire. Nous avons donc trouvé simplement une *primitive auxiliaire*, fonction de notre nouvelle variable d'intégration. Pour donner l'intégrale indéfinie de la fonction initiale, il suffit de revenir à la variable x en utilisant la relation $t = \ln(x)$, et l'on trouve donc

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(x)) + c, \quad x > 1.$$

Nous allons maintenant présenter le théorème du changement de variable qui établit rigoureusement comment appliquer cette démarche de façon générale au calcul d'intégrales définies. Après quoi nous donnerons quelques exemples typiques permettant à la lectrice de se familiariser avec l'exercice. Il est important de réaliser que seul un entraînement conséquent permet d'être à l'aise avec les différentes techniques d'intégration ; nous entendons par là qu'il faut avoir calculé plusieurs centaines d'intégrales indéfinies faisant intervenir des intégrations par parties et autres changements de variable avant d'avoir le sentiment de maîtriser cet exercice.

Dans ce qui suit, nous considérons I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, ainsi que deux points $A, B \in J$, $A < B$.

8.3.3 Définition

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle *difféomorphisme de classe C^k* (ou *C^k -difféomorphisme*) de J dans I toute application $\varphi : J \longrightarrow I$ bijective, de classe C^k , telle que φ^{-1} est également de classe C^k . On dira simplement que φ est un difféomorphisme s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que φ est un C^k -difféomorphisme.

8.3.4 Proposition

Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ un difféomorphisme. Alors $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$.

Démonstration Puisque φ^{-1} et φ sont toutes deux dérivables, l'identité

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(t))\varphi'(t) = 1, \quad t \in J,$$

donne immédiatement le résultat. ♦

La proposition précédente donne un avant-goût du théorème de la fonction inverse qui sera vu en analyse 2 au semestre prochain.

8.3.5 Théorème (*changement de variable*)

Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ un C^1 -difféomorphisme et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([A, B])$. Posant $a = \varphi(A)$ et $b = \varphi(B)$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

On se référera parfois à ce résultat par l'acronyme "TCV".

8.3.6 Remarque

- (i) Remarquons que φ est une bijection de l'intervalle $[A, B]$ sur l'intervalle $[\varphi(A), \varphi(B)]$ si $\varphi' > 0$, sur $[\varphi(B), \varphi(A)]$ si $\varphi' < 0$. Dans le premier cas on dit que φ préserve l'orientation, dans le second que φ change l'orientation.
- (ii) L'hypothèse que φ est un C^1 -difféomorphisme peut être affaiblie. On verra dans la démonstration qu'il suffit en effet de supposer que $\varphi \in C^1([A, B])$. L'intérêt des considérations ci-dessus concernant les difféomorphismes est de vous donner une première introduction aux notions qui permettront la généralisation du TCV aux fonctions sur $\mathbb{R}^n$ en analyse 2, et plus tard en géométrie différentielle.

Avant de prouver le théorème, nous établissons une formule très utile donnant la dérivée d'une intégrale, considérée comme fonction de ses bornes d'intégration.

8.3.7 Proposition

Soit ψ et φ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans $[a, b]$. Si f est continue sur $[a, b]$, alors on a, pour tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} f(y) dy = f(\varphi(t))\varphi'(t) - f(\psi(t))\psi'(t).$$

Démonstration Il suffit de montrer que

$$\frac{d}{dt} \int_a^{\varphi(t)} f(y) dy = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Utilisant la primitive de f définie par (8.14), il vient

$$\frac{d}{dt} \int_a^{\varphi(t)} f(y) dy = \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t). \quad \blacklozenge$$

Démonstration du théorème 8.3.5 Utilisant à nouveau la primitive (8.14), le calcul ci-dessus donne

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in [A, B].$$

Appliquant deux fois le théorème fondamental, on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F(\varphi(B)) - F(\varphi(A)) \\ &= \int_A^B \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) dt = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Le théorème du changement de variable est énoncé ci-dessus pour les intégrales définies. Il exprime comment la valeur d'une intégrale est obtenue de deux manières différentes lorsque l'on applique un difféomorphisme au domaine d'intégration.

En pratique, la méthode du changement de variable permet de simplifier la recherche de primitive. C'est le cas lorsque

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad \text{est plus facile à déterminer que} \quad \int f(x)dx.$$

Dans la recherche de primitive, on peut se permettre d'utiliser des changements de variable sans vérifier soigneusement qu'on a affaire à des difféomorphismes, **pour autant que l'on vérifie le résultat obtenu a posteriori.**

8.3.8 Exemple

(i) On cherche à calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{Ax + B}dx,$$

pour $A, B \in \mathbb{R}$, $A > 0$. On fait le changement de variable $t = \sqrt{Ax + B}$, i.e.

$$\varphi : (0, \infty) \longrightarrow (-B/A, \infty), \quad t \mapsto x = \varphi(t) = \frac{t^2 - B}{A} \quad \varphi'(t) = \frac{2}{A}t.$$

Donc φ est bien un difféomorphisme, avec $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in (0, \infty)$. La primitive auxiliaire est donnée par

$$\int t \frac{2}{A} t dt = \frac{2}{A} \int t^2 dt = \frac{2}{3A} t^3 + c, \quad t \in (0, \infty),$$

d'où

$$\int \sqrt{Ax + B}dx = \frac{2}{3A} (Ax + B)^{3/2} + c, \quad x \in (-B/A, \infty).$$

(ii) Avec le même changement de variable nous pouvons calculer, pour $x > -B/A$, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{Ax + B}}.$$

La primitive auxiliaire est donnée par

$$\int \frac{1}{t} \frac{t^2 - B}{A} \frac{2}{A} t dt = \frac{2}{A^2} \int (t^2 - B) dt = \frac{2}{A^2} \left(\frac{t^3}{3} - Bt \right) + c, \quad t \in (0, \infty),$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{Ax + B}} &= \frac{2}{A^2} \left(\frac{(\sqrt{Ax + B})^3}{3} - B\sqrt{Ax + B} \right) + c \\ &= \frac{2}{A^2} \sqrt{Ax + B} \left(\frac{Ax - 2B}{3} \right) + c, \quad x \in (-B/A, \infty). \end{aligned}$$

(iii) Pour calculer l'intégrale

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x \in [-1, 1],$$

utilisons le changement de variable

$$\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow (-1, 1), \quad t \mapsto x = \varphi(t) = \sin(t) \implies \varphi'(t) = \cos(t).$$

Nous avons alors l'intégrale auxiliaire

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt &= \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) + c \\ &= \frac{1}{2}(t + \sin(t) \cos(t)) + c, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2), \end{aligned}$$

d'où

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} \right) + c, \quad x \in (-1, 1).$$

On obtient alors

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} \right) + c, \quad x \in [-1, 1]$$

en prolongeant par continuité.

(iv) Considérons maintenant l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{x^2-1} dx, \quad x \in [1, \infty).$$

Nous effectuons le changement de variable

$$\varphi : (0, \infty) \longrightarrow (1, \infty), \quad t \mapsto x = \varphi(t) = \cosh(t) \implies \varphi'(t) = \sinh(t),$$

et nous obtenons la primitive auxiliaire

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\cosh^2(t)-1} \sinh(t) dt &= \int \sinh^2(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t \right) + c = \frac{1}{4}(\sinh(2t) - 2t) + c \\ &= \frac{1}{2} \sinh(t) \cosh(t) - \frac{1}{2}t + c, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Ainsi, en prolongeant par continuité,

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right) + c, \quad x \in [1, \infty).$$

- (v) Nous donnons à présent une application géométrique simple de l'intégrale définie : le calcul de l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a > b > 0.$$

Un quart du domaine se trouve dans le premier quadrant, délimité par les axes de coordonnées et la courbe d'équation $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $0 \leq x \leq a$. Nous avons alors que l'aire totale est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4 \int_0^a b\sqrt{1 - x^2/a^2} = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} a \cos(t) dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt \\ &= 4ab \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le changement de variable $x = a \sin(t)$.

8.4 Longueur d'arc

Nous donnons maintenant une application géométrique importante du calcul intégral : la formule pour la longueur d'une courbe pouvant être exprimée comme le graphe d'une fonction de classe C^1 .

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et l'on définit $L_\sigma > 0$ comme la longueur de l'approximation polygonale correspondante du graphe de f (faire un dessin) :

$$L_\sigma := \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

On se convainc aisément que

$$\sigma \subset \tau \implies L_\sigma \leq L_\tau. \quad (8.20)$$

Si cette quantité est finie, on appelle

$$L := \sup L_\sigma$$

la *longueur* du graphe, le supremum étant pris sur toutes les subdivisions de $[a, b]$.

8.4.1 Théorème

$$\text{Si } f \in C^1([a, b], \mathbb{R}), \text{ alors } L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Démonstration Par le TAF (corollaire 5.2.4), pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\tilde{x}_i)(x_i - x_{i-1}),$$

d'où

$$L_\sigma = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\tilde{x}_i)^2} (x_i - x_{i-1}).$$

On considère alors la fonction

$$g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}, \quad x \in [a, b].$$

On a

$$\min_{[x_{i-1}, x_i]} g \leq g(\tilde{x}_i) \leq \max_{[x_{i-1}, x_i]} g \implies \underline{S}(g, \sigma) \leq L_\sigma \leq \overline{S}(g, \sigma),$$

pour toute subdivision σ de $[a, b]$. Soit maintenant σ_1, σ_2 deux subdivisions et $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Utilisant (8.20) et le Lemme 8.1.6, on a alors

$$\underline{S}(g, \sigma_1) \leq L_{\sigma_1} \leq L_\sigma \leq \overline{S}(g, \sigma) \leq \overline{S}(g, \sigma_2).$$

En prenant le supremum sur σ_1 dans ces inégalités, on voit que L est fini et satisfait

$$\underline{S}(g) \leq L \leq \overline{S}(g, \sigma_2),$$

pour toute subdivision σ_2 . Prenant alors l'infimum sur σ_2 , il vient

$$\underline{S}(g) \leq L \leq \overline{S}(g).$$

Comme $g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ par hypothèse, on a que g est intégrable, donc les inégalités ci-dessus deviennent $\underline{S}(g) = L = \overline{S}(g)$, ce qui achève la démonstration. ♦

8.5 Théorèmes de convergence

Nous terminons ce chapitre par deux théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour passer à la limite dans l'intégrale d'une suite de fonctions.

8.5.1 Théorème (*convergence uniforme*)

Soit $a < b$ et considérons une suite de fonctions f_n continues sur $[a, b]$ telles que $f_n \xrightarrow{U} f$ ($n \rightarrow \infty$). Alors f est intégrable et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (8.21)$$

L'existence de la limite fait partie du théorème.

Démonstration La fonction f est continue comme limite uniforme de fonctions continues ; elle est donc intégrable. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a},$$

pour tout $n \geq N$. Ainsi,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon,$$

pour tout $n \geq N$. Le nombre $\varepsilon > 0$ étant quelconque, nous avons prouvé le théorème de la convergence uniforme. ♦

8.5.2 Remarque

La théorie de Lebesgue propose une version beaucoup plus souple de ce théorème qui ne nécessite pas la convergence uniforme. C'est en effet une propriété très forte qui s'avère difficile à vérifier en pratique. Le théorème proposé par Lebesgue est appelée *théorème de la convergence dominée*. Il dit essentiellement que l'on peut "passer la limite sous le signe intégrale" si toutes les fonctions f_n sont majorées par une même fonction g intégrable, i.e. si $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout point x dans le domaine d'intégration. C'est ce théorème qui est le plus souvent utilisé en pratique.

8.5.3 Théorème (*convergence monotone*)

Soit $a < b$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant ponctuellement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration Utiliser le théorème de Dini (6.2.2) et le théorème précédent. ♦

8.6 Intégrales généralisées

En guise de motivation, considérons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Comme l'intégrande est continu sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale existe. Le changement de variable naturel pour la calculer consiste à poser $t = \tan(x)$, ce qui transforme l'intégrale en...

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt !$$

De manière analogue au cas des séries numériques, nous sommes ici naturellement amenés à se demander si un sens rigoureux peut être donné à l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle non borné. Nous verrons qu'une question très similaire est la suivante : peut-on donner un sens à

$$\int_a^b f(x) dx$$

si f est continue sur $[a, b)$ mais $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm \infty$?

Partie 1. Intervalles bornés

Nous commençons par répondre à la deuxième question ci-dessus.

8.6.1 Définition

Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $F : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) := \int_a^t f(x)dx, \quad t \in [a, b).$$

Remarquons que l'intégrale ci-dessus existe car $f \in C^0([a, t], \mathbb{R})$ pour tout $t \in [a, b)$. On définit l'*intégrale généralisée* (ou *intégrale impropre*)

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow b^-} F(t).$$

Si la limite existe et est finie, on dit que l'intégrale *converge* (ou *existe*). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale *diverge* (ou *n'existe pas*).

De manière analogue, si $f \in C^0((a, b], \mathbb{R})$, on définit

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^b f(x)dx.$$

Finalement, si $f \in C^0((a, b), \mathbb{R})$, on définit

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{s \rightarrow a^+ \\ t \rightarrow b^-}} \int_s^t f(x)dx \quad (8.22)$$

ou, de façon équivalente,

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

où $c \in (a, b)$ est un nombre quelconque.

Dans chacun des cas ci-dessus, on dit que l'intégrale converge/existe si la (les) limite(s) existe(nt).

8.6.2 Remarque

L'intégrale généralisée satisfait les mêmes propriétés fondamentales que l'intégrale de Riemann : linéarité, monotonie, additivité par rapport aux bornes, inégalité de Cauchy-Schwarz, etc. Nous laissons au lecteur le soin de les reprendre une à une et de les étendre à l'intégrale généralisée.

8.6.3 Proposition

Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existe et soit $\hat{f} \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ le prolongement par continuité de f . Alors $\int_a^b f$ existe et

$$\int_a^b f = \int_a^b \hat{f}.$$

Démonstration Posons

$$F(t) := \int_a^t f(x)dx \quad \text{et} \quad \hat{F}(t) := \int_a^t \hat{f}(x)dx.$$

Clairement, $F(t) = \hat{F}(t)$ pour tout $t \in [a, b)$. Donc $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} \hat{F}(t)$. ♦

8.6.4 Exemple

(i) La fonction $f(x) = \ln(x)$ est continue sur $(0, 1]$ et on a

$$\int_0^1 \ln(x)dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \ln(x)dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} x(\ln(x)-1) \Big|_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} (-1-s(\ln(s)-1)) = -1.$$

(ii) Etudions maintenant, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (a < b).$$

Tout d'abord, pour tout $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= - \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{1}{1-\alpha} (b-x)^{1-\alpha} \Big|_a^t = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{1}{1-\alpha} ((b-a)^{1-\alpha} - (b-t)^{1-\alpha}) \\ &= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = - \lim_{t \rightarrow b^-} \ln(b-x) \Big|_a^t = \lim_{t \rightarrow b^-} (\ln(b-a) - \ln(b-t)) = +\infty.$$

En résumé,

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Comme dans l'étude des séries numériques, une large part de la théorie concerne l'intégration des fonctions positives. La proposition suivante correspond à la proposition 3.1.10 dans le cadre des séries.

8.6.5 Définition

Soit $f \in C^0([a, b])$. On dit que $\int_a^b f$ converge absolument si $\int_a^b |f|$ converge.

8.6.6 Proposition

Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_a^b |f|$ existe, alors $\int_a^b f$ existe et

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Démonstration Par (8.9), nous savons que

$$\left| \int_a^t f \right| \leq \int_a^t |f|, \quad \forall t \in [a, b).$$

Il suffit donc de montrer que le membre de gauche de cette inégalité admet une limite lorsque $t \rightarrow b^-$. Posons

$$F(t) := \int_a^t f, \quad G(t) := \int_a^t |f|, \quad t \in [a, b).$$

Nous allons utiliser le critère de convergence suivant, qui découle du théorème 2.5.3 et du corollaire 4.2.6 : pour toute fonction $H : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow b^-} H(t) \text{ existe} \iff$$

$$H(t_n) - H(t_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \text{ pour toute suite } (t_n) \subset [a, b) \text{ t.q. } t_n \rightarrow b.$$

Soit $(t_n) \subset [a, b)$ une suite telle que $t_n \rightarrow b$. Par hypothèse, le critère ci-dessus donne $G(t_n) - G(t_m) \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$). Donc

$$|F(t_n) - F(t_m)| = \left| \int_a^{t_n} f - \int_a^{t_m} f \right| \leq \int_{t_m}^{t_n} |f| = G(t_n) - G(t_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty),$$

ce qui prouve que $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t)$ existe, en évoquant à nouveau le critère ci-dessus. ♦

Nous allons maintenant établir quelques critères utiles pour étudier la convergence d'intégrales généralisées pour des intégrandes positifs.

8.6.7 Proposition

Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b)$. Alors $F(t) := \int_a^t f$ est croissante sur $[a, b)$ et l'on a l'alternative suivante : soit (a) $F : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée et $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t)$ existe dans $\mathbb{R}$, soit (b) $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) = +\infty$.

Démonstration Pour tout $a \leq s < t < b$, nous avons que

$$F(t) - F(s) = \int_a^t f - \int_a^s f = \int_s^t f \geq 0$$

par positivité de f , ce qui montre que F est croissante sur $[a, b)$.

Supposons, de plus, que F est bornée sur $[a, b)$ et soit $M = \sup F \in \mathbb{R}$. Par définition du supremum, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_\varepsilon \in [a, b)$ tel que

$$M - \varepsilon \leq F(t_\varepsilon) \leq M.$$

Comme F est croissante, on a donc

$$M - \varepsilon \leq F(t) \leq M \quad \forall t_\varepsilon \leq t < b,$$

ce qui prouve que $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) = M$.

Si F est croissante et non bornée, on a bien $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) = \sup F = +\infty$. ♦

8.6.8 Théorème

Soit $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues satisfaisant

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b).$$

(i) Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

(ii) Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.

Démonstration Par hypothèse,

$$\int_a^t f \leq \int_a^t g, \quad \forall t \in [a, b).$$

Donc (i) découle immédiatement de la proposition précédente. (ii) découle de (i) par contraposition. ♦

8.6.9 Théorème

Soit $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que $g > 0$ dans un voisinage à gauche de b : il existe $\eta > 0$ tel que $g(x) > 0$ pour tout $b - \eta < x < b$.

(i) S'il existe $l \neq 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ ont même nature.

(ii) Si $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ alors $\int_a^b g$ converge $\implies \int_a^b |f|$ converge.

(iii) Si $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ alors $\int_a^b g$ diverge $\implies \int_a^b |f|$ diverge.

Démonstration (i) Supposons tout d'abord que $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$. Soit $\varepsilon \in (0, l)$ et $\delta \in (0, \eta)$ tel que $|f/g - l| < \varepsilon$ sur $[b - \delta, b)$. On a alors

$$(l - \varepsilon)g < f < (l + \varepsilon)g \quad \text{sur } [b - \delta, b).$$

Le résultat découle alors directement du théorème 8.6.8, appliqué à l'intervalle $[b - \delta, b)$. Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l < 0$, le raisonnement précédent appliqué à $-f$ donne le résultat.

(ii) Supposons maintenant que $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné et $\delta \in (0, \eta)$ correspondant, nous avons que

$$|f| < \varepsilon |g| = \varepsilon g \quad \text{sur } [b - \delta, b).$$

Ainsi, par le théorème 8.6.8 et la proposition 8.6.6,

$$\int_{b-\delta}^b g \text{ converge} \implies \int_{b-\delta}^b |f| \text{ converge.}$$

(iii) En échangeant les rôles de f et g dans l'argument ci-dessus, on a que

$$0 < g = |g| < \varepsilon |f| \quad \text{sur } [b - \delta, b).$$

Le théorème 8.6.8 montre alors que

$$\int_{b-\delta}^b g \text{ diverge} \implies \int_{b-\delta}^b |f| \text{ diverge. } \blacklozenge$$

8.6.10 Remarque

Les théorèmes 8.6.8 et 8.6.9 s'adaptent avec des modifications évidentes au cas où $f, g \in C^0((a, b], \mathbb{R})$.

8.6.11 Notation

Soit $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \rightarrow b^-$ si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Par exemple, l'hypothèse de la partie (i) du théorème 8.6.9 se réécrit $f(x) \sim lg(x)$ lorsque $x \rightarrow b^-$. Avec des modifications évidentes de la définition, une notation analogue est employée lorsque $x \rightarrow a^+$ ou encore lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

8.6.12 Exemple

(i) Etudions la convergence de

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

On a bien affaire à une intégrale généralisée car la fonction $f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ n'est pas définie en $x = 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique de f au voisinage de $x = 0$, afin de comparer f avec une fonction plus simple. On

remarque que $f(x) \sim x^{-1/2}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. On va donc comparer f avec la fonction $g(x) = x^{-1/2}$. Comme $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in (0, 1]$, et

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 x^{-1/2} dx = \lim_{s \rightarrow 0^+} 2x^{1/2} \Big|_s^1 = 2 < \infty,$$

on déduit du théorème 8.6.8 que $\int_0^1 f$ converge.

(ii) On considère maintenant

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

Cette intégrale est “doublement impropre” car $f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$ n’est définie ni en $x = 0$ ni en $x = 1$. On écrit $\int_0^1 f = \int_0^{1/2} f + \int_{1/2}^1 f$.

- $\int_0^{1/2} f$: on remarque comme ci-dessus que $f(x) \sim x^{-1/2}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, d’où comparaison avec $g(x) = x^{-1/2}$. Néanmoins, l’inégalité $f(x) \leq g(x)$ n’étant pas vraie sur $(0, \frac{1}{2}]$, on ne peut invoquer le théorème 8.6.8. On fait donc appel à la forme limite du critère de comparaison : par le théorème 8.6.9 (i), $\int_0^{1/2} f$ et $\int_0^{1/2} g$ ont même nature, d’où la convergence de $\int_0^{1/2} f$.

- $\int_{1/2}^1 f$: puisque $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$ lorsque $x \rightarrow 1^-$, et que

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{1-x} = +\infty$$

par l’exemple 8.6.4 (ii), on conclut par le théorème 8.6.9 (i) que $\int_{1/2}^1 f$ diverge.

Ainsi, comme $\int_0^{1/2} f$ converge et $\int_{1/2}^1 f$ diverge, on conclut que $\int_0^1 f$ diverge.

De manière équivalente, se référant à la définition (8.22), on aurait pu directement conclure que $\int_0^1 f$ diverge en remarquant que $\int_s^1 f = +\infty$ pour tout $s \in (0, 1)$, ce qui découle du théorème 8.6.9 (i), en comparant f avec $g(x) = \frac{1}{1-x}$ comme ci-dessus.

Il est important de ne pas confondre la définition (8.22) avec la définition suivante.

8.6.13 Définition

Soit $a > 0$ et $f \in C^0((-a, a), \mathbb{R})$. On définit la *valeur principale* de l’intégrale généralisée $\int_{-a}^a f$ par

$$\text{VP} \int_{-a}^a f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a^-} \int_{-t}^t f(x) dx.$$

Si la limite ci-dessus existe, on dit que $\text{VP} \int_{-a}^a f$ existe ou converge, sinon qu’elle diverge ou n’existe pas.

8.6.14 Proposition

Soit $a > 0$ et $f \in C^0((-a, a), \mathbb{R})$. Si $\int_{-a}^a f$ existe, alors VP $\int_{-a}^a f$ existe et, dans ce cas, $\int_{-a}^a f = \text{VP} \int_{-a}^a f$.

Démonstration Par hypothèse,

$$\lim_{\substack{s \rightarrow (-a)^+ \\ t \rightarrow a^-}} \int_s^t f(x) dx$$

existe, quelle que soit la façon de laisser $s \rightarrow (-a)^+$ et $t \rightarrow a^-$. En particulier, nous pouvons prendre $s = -t \rightarrow (-a)^+$ lorsque $t \rightarrow a^-$, d'où le résultat. ♦

L'exemple suivant montre que la réciproque est fausse.

8.6.15 Exemple

Soit $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x)$. Comme f est impaire, on a

$$\int_{-t}^t f(x) dx = 0, \quad \forall t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Par conséquent, $\text{VP} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f = 0$. En revanche,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} -\ln(\cos(x)) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} -\ln(\cos(t)) = +\infty,$$

donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f$ diverge.

Partie 2. Intervalles non-bornés

Nous définissons maintenant l'intégrale d'une fonction sur une demi-droite.

8.6.16 Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0([a, \infty), \mathbb{R})$. On définit l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f$ par

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

De manière analogue, si $b \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0((-\infty, b], \mathbb{R})$, on définit

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^b f(x) dx.$$

Si $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit encore

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{\substack{s \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty}} \int_s^t f(x) dx$$

ou, de façon équivalente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est un nombre quelconque.

Finalement, pour $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x)dx.$$

Dans chacun des cas ci-dessus, on dit que l'intégrale converge si la (les) limite(s) existe(nt), qu'elle diverge sinon.

8.6.17 Exemple

(i) Etudions la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}}$$

en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, pour tout $\beta \neq 1$,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \Big|_1^t = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1, \\ +\infty & \text{si } \beta < 1. \end{cases}$$

D'autre part, pour $\beta = 1$, on a

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^t = +\infty.$$

En résumé,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1, \\ +\infty & \text{si } \beta \leq 1. \end{cases}$$

(ii) Comme la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire, on a que

$$\int_{-t}^t \sin(x)dx = 0, \quad \forall t > 0.$$

Par conséquent,

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)dx = 0.$$

En revanche,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sin(x)dx = - \lim_{t \rightarrow \infty} \cos(x) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \cos(t))$$

n'existe pas, donc l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)dx$ n'existe pas.

De manière analogue, on a que VP $\int_{-\infty}^{\infty} \tanh(x)dx = 0$ mais, par exemple,

$$\int_{-t^2}^t \tanh(x)dx = \ln \cosh(x) \Big|_{-t^2}^t = \ln \frac{\cosh(t)}{\cosh(t^2)} \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow \infty).$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{\infty} \tanh(x)dx = 0$ n'existe pas (cf. définition (8.22)).

Nous énonçons maintenant les théorèmes de comparaison pour le cas des fonctions $f, g \in C^0([a, \infty), \mathbb{R})$, qui s'obtiennent en posant $b = \infty$ dans les théorèmes 8.6.8 et 8.6.9. Nous laissons le soin à la lectrice d'adapter les démonstrations qui ont été données dans le cas $b < \infty$, et également d'énoncer les résultats analogues pour des fonctions $f, g \in C^0((-\infty, b], \mathbb{R})$.

8.6.18 Théorème

Soit $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues satisfaisant

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, \infty).$$

- (i) Si $\int_a^{\infty} g$ converge, alors $\int_a^{\infty} f$ converge.
- (ii) Si $\int_a^{\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{\infty} g$ diverge.

8.6.19 Théorème

Soit $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que $g > 0$ dans un voisinage à gauche de ∞ : il existe $M > 0$ tel que $g(x) > 0$ pour tout $x > M$.

- (i) S'il existe $l \neq 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ alors $\int_a^{\infty} f$ et $\int_a^{\infty} g$ ont même nature.
- (ii) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ alors $\int_a^{\infty} g$ converge $\implies \int_a^{\infty} f$ converge.
- (iii) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ alors $\int_a^{\infty} g$ diverge $\implies \int_a^{\infty} |f|$ diverge.

8.6.20 Exemple

- (i) Etudions la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

On commence par remarquer que

$$\int_{-t}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^t e^{-x^2} dx, \quad \forall t > 0.$$

Ainsi, il suffit de déterminer la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

On écrit $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$.

- $\int_0^1 e^{-x^2} dx$: c'est une intégrale définie.
- $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$: cette intégrale généralisée est convergente, en vertu du théorème 8.6.18 (i) et de la majoration $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, $x \geq 1$.

En conclusion, $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ converge. On montrera aux exercices que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(ii) Etudions maintenant la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

On commence par observer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} & \text{si } \alpha = 0, \\ 1 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} dx$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ par la proposition 8.6.3.

- Cas $\alpha < 0$. On a alors $x^\alpha \rightarrow 0$, d'où $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} \sim x+1$, lorsque $x \rightarrow \infty$. Ainsi, invoquant le théorème 8.6.19 (i), on conclut que

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} dx = \infty \quad \text{si } \alpha < 0.$$

- Cas $\alpha = 0$. On a $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} \sim \frac{x+1}{\sqrt[3]{2}}$ et l'intégrale diverge, comme pour $\alpha < 0$.
- Cas $\alpha > 0$. On a alors $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} \sim x^{1-\alpha/3}$, lorsque $x \rightarrow \infty$. Puisque

$$\int_1^\infty x^{1-\alpha/3} dx = \begin{cases} \frac{3}{\alpha-6} & \text{si } \alpha > 6, \\ \infty & \text{si } \alpha \leq 6, \end{cases}$$

le théorème 8.6.19 (i) implique que $\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} dx$ converge ssi $\alpha > 6$.

En conclusion, $\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}} dx$ converge ssi $\alpha > 6$.

Le théorème suivant établit un lien, pour les intégrandes à valeurs positives, entre intégrale généralisée et série numérique.

8.6.21 Théorème

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante. Posons $a_n = f(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge ssi $\int_0^\infty f$ converge.

Démonstration On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n-1} = f(n-1) \geq f(x) \geq f(n) = a_n, \quad \text{si } n-1 \leq x \leq n.$$

Ainsi,

$$a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

d'où l'on déduit par sommation que

$$\sum_{n=1}^k a_n \leq \int_0^k f(x) dx \leq \sum_{n=1}^k a_{n-1}, \quad \forall k \geq 1.$$

On obtient alors le résultat en laissant $k \rightarrow \infty$. ♦

Nous terminons ce chapitre par un **avertissement important** :

$$\int_0^\infty f \text{ converge} \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Considérons en effet l'exemple suivant. On définit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sur chaque intervalle $I_n = [n - 1/n^3, n + 1/n^3]$, $n \geq 2$, par

$$f(x) = \begin{cases} n^4(x - (n - 1/n^3)), & x \in [n - 1/n^3, n], \\ -n^4(x - (n + 1/n^3)), & x \in [n, n + 1/n^3], \end{cases}$$

et l'on pose $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{n \geq 2} I_n$. En traçant le graphe de f , on voit facilement que

$$\int_0^\infty f = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

En revanche, f n'admet pas de limite à l'infini. En effet, pour la suite $x_n = n$, on a que $f(x_n) = f(n) = n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'autre part, pour tout $n \geq 2$, les intervalles I_n et I_{n+1} étant disjoints, il existe y_n entre I_n et I_{n+1} . On a alors $y_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et $f(y_n) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Ouvrages de référence

Il existe des centaines de livres traitant de la matière couverte dans le cours, plus ou moins bons, avec divers points de vue (certains plus calculatoires, d'autres plus géométriques, plus abstraits ou plus généraux). J'indique ci-dessous quelques ouvrages assez différents les uns des autres, et qui peuvent compléter le présent texte dans plusieurs directions :

- Alfred Doneddu, *Topologie. Fonctions réelles d'une variable réelle. Nouveau Cours de Mathématiques, Tome 4*, Vuibert, 1977.
- Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral : Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles*, 4e édition, EPFL PRESS, 2023.
- Roger Godement, *Analyse mathématique I*, Springer, 2001.
- Nikolaï Piskounov, *Calcul différentiel et intégral. Tome 1*, Ellipses, 1993.
- Walter Rudin, *Principes d'analyse mathématique*, Dunod, 2006.