

Example 2.3.3 :

$$(ii) \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+2}$$

like type " $\infty - \infty$ "

On calcule comme suit :

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \rightarrow$ appliquer Prop. 2.3.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{n}}_{\downarrow \infty} \left(\underbrace{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}_{\downarrow \sqrt{2}-1 > 0} \right) = +\infty.$$

On transforme ainsi " $\infty - \infty$ " en $\infty \cdot (\sqrt{2}-1) = \infty$.

On dit qu'on a levé l'indétermination.

Rem: Quand j'écris $\infty \cdot (\sqrt{2}-1)$, j'utilise l'algèbre

dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ (droite réelle achevée).

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$

On essaie $\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right)$.

Pas concluant car on a ici remplacé

" $\infty - \infty$ " par " $\infty \cdot 0$ "

qui est aussi une forme indéterminée !

On s'en sort en amplifiant par le conjugué :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} \right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\cancel{n+1}) - (\cancel{n+2})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = 0
 \end{aligned}$$

En conclusion, ces deux limites du type " $\infty - \infty$ " donnent des résultats très différents :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+2} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} = 0$$

Autres exemples de formes indéterminées :

• "0 · ∞" : $\frac{1}{n} \cdot n^2 \rightarrow \infty$; $\frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \rightarrow 0$; $\frac{1}{n} \cdot n \rightarrow 1$

• " $\frac{\infty}{\infty}$ " : $\frac{a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \dots + b_q n^q} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$

$\frac{\ln(n)}{n}$ (Stolz-Cesaro) ; $\frac{n!}{n^n} \dots$

• " 1^∞ " : $\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1}^{\textcircled{n} \rightarrow \infty} \rightarrow e > 1 \quad (n \rightarrow \infty)$

• " ∞^0 " : $\sqrt[n]{n} = \underbrace{\left(n\right)}_{\rightarrow \infty}^{\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$