Enseignant: F. Genoud
Analyse Avancée I - PH
16 janvier 2024
Durée : 210 minutes

1

Isaac Newton

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 questions et 36 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 100 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant (ou carte d'identité) bien visiblement sur la table.
- Vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER ci-dessus.
- Aucun document n'est autorisé.
- **L'utilisation d'une calculatrice et de tout appareil électronique est interdite.**
- Pour les questions à choix multiple, vous obtiendrez:
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo à encre noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du correcteur blanc si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace dédié. **Aucune feuille supplémentaire ne sera fournie.**
- Les brouillons ne doivent pas être rendus, ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple (20 points)

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte.
Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Déterminer si l'une des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessous est Riemann-intégrable sur $[0,1]$:

- ☐ $f(x) = 1$ si $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$
- ☐ $f(x) = 1/(1-x)$ si $x \in [0,1)$, $f(1) = 0$
- ☐ $f(x) = 1$ si $x \in \{1/3, 2/3\}$, $f(x) = 0$ si $x \in [0,1] \setminus \{1/3, 2/3\}$
- ☐ aucune des fonctions données n'est Riemann-intégrable

Question 2 (3 points)
Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

- ☐ converge si et seulement si $x \geqslant 0$.
- ☐ est bornée supérieurement, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ n'est pas bornée inférieurement, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ est décroissante si $x < 0$.

Question 3 (4 points)
Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}{6 - 5\sin\varphi + \sin^2\varphi} :$$

- ☐ $\ln(4)$
- ☐ $\ln(4/3)$
- ☐ $\ln(2/3)$
- ☐ $\ln(1/3)$

Question 4 (4 points)
La fonction $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\operatorname{argsinh}(x)} & \text{si } x \in (0, \infty), \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

- ☐ est discontinue en $x = 0$.
- ☐ possède un maximum local et un minimum global.
- ☐ est strictement croissante.
- ☐ possède un minimum local et un maximum global.

Question 5 (3 points)
Soit $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Laquelle des affirmations suivantes est-elle vraie?

- ☐ f' existe et est bornée sur $[0, \infty)$ $\implies$ f est uniformément continue sur $[0, \infty)$.
- ☐ $f \in C^2([0, \infty))$ $\implies$ f est uniformément continue sur $[0, \infty)$.
- ☐ Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie.
- ☐ f est uniformément continue sur $[0, \infty)$ $\implies$ f est dérivable sur $[0, \infty)$.

Question 6 (4 points)
Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors:

- ☐ g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = f''(0)$.
- ☐ g n'est pas dérivable en $x = 0$.
- ☐ g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = \frac{1}{2} f''(0)$.
- ☐ g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = f'(0)$.

Deuxième partie, questions ouvertes (80 points)

Répondre dans l'espace dédié. Toutes les étapes de votre raisonnement et de vos calculs doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher, elles sont réservées à la correction.

Question 7: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

(a) Définir les termes suivants: (i) suite bornée; (ii) suite monotone; (iii) sous-suite.

(b) Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ n'est pas bornée, alors elle possède une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $|x_{n_k}| \longrightarrow \infty$ $(k \to \infty)$.

(c) Prouver qu'une suite monotone et bornée est convergente.

Question 8: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Prouver que, pour tout $x_0 > 0$ et $\alpha \in (0,1)$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par

$$x_{n+1} = x_n - \ln(1 + \alpha x_n) \quad (n \geqslant 0)$$

est convergente. Puis calculer sa limite.

Question 9: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

(a) Définir les assertions "$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge" et "$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolument".

(b) Prouver que: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolument $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

(c) Donner un exemple de série qui converge mais ne converge pas absolument.

Question 10: *Cette question est notée sur 11 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11

(a) Enoncer le critère de condensation de Cauchy utilisant la suite auxiliaire standard $a_n = 2^n$.

(b) Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes:

$$\text{(i)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\pi}-2}; \qquad \text{(ii)} \sum_{n\geqslant 1} (e^{\frac{1}{n^{\alpha}}} - e^{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}) \ (\alpha > 0); \qquad \text{(iii)} \sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}.$$

Indication: Utiliser un critère de comparaison et/ou le critère de condensation.

Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

(a) Soient $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

(i) Prouver que, si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors $|f| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(ii) La réciproque est-elle vraie? Justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

(b) Déterminer tous les points où la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ est continue.

Question 12: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin(\frac{1}{x})) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$ a-t-on $f \in C^k(\mathbb{R})$? Justifier rigoureusement votre réponse.

(c) Prouver que f a un minimum global en $x = 0$ mais n'est monotone sur aucun intervalle de la forme $(-\varepsilon, 0)$ ou $(0, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.

Question 13: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 autour de $x = 0$ de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{e^{\cos(x)}}.$$

Question 14: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Déterminer les limites ponctuelles des suites de fonctions suivantes, puis déterminer dans chaque cas si la convergence est uniforme:

$$\text{(i) } f_n(x) = \frac{\tanh(nx^2)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}; \qquad \text{(ii) } g_n(x) = x \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}.$$

Question 15: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Etudier, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{\alpha}}{\sinh(\ln(x))}\,\mathrm{d}x.$$

Question 16: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(a) Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(bx)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

est-elle convergente? Justifier votre réponse.

(b) Lorsqu'elle est convergente, déterminer en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ la valeur de l'intégrale généralisée (1).