



1

Enseignant: F. Genoud
Analyse Avancée I - PH
16 janvier 2024
Durée : 210 minutes

Isaac Newton

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 questions et 36 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 100 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant (ou carte d'identité) bien visiblement sur la table.
- Vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER ci-dessus.
- Aucun document n'est autorisé.
- **L'utilisation d'une calculatrice et de tout appareil électronique est interdite.**
- Pour les questions à choix multiple, vous obtiendrez:
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo à encre noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du correcteur blanc si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace dédié. **Aucune feuille supplémentaire ne sera fournie.**
- Les brouillons ne doivent pas être rendus, ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Première partie, questions à choix multiple (20 points)**

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte.
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)

Déterminer si l'une des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessous est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$:

- ☐ $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$
- ☐ $f(x) = 1/(1-x)$ si $x \in [0, 1)$, $f(1) = 0$
- ☐ $f(x) = 1$ si $x \in \{1/3, 2/3\}$, $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1] \setminus \{1/3, 2/3\}$
- ☐ aucune des fonctions données n'est Riemann-intégrable

Question 2 (3 points)

Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

- ☐ converge si et seulement si $x \geq 0$.
- ☐ est bornée supérieurement, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ n'est pas bornée inférieurement, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ est décroissante si $x < 0$.

Question 3 (4 points)

Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{6 - 5 \sin \varphi + \sin^2 \varphi} :$$

- ☐ $\ln(4)$
- ☐ $\ln(4/3)$
- ☐ $\ln(2/3)$
- ☐ $\ln(1/3)$

Question 4 (4 points)

La fonction $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\operatorname{argsinh}(x)} & \text{si } x \in (0, \infty), \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

- ☐ est discontinue en $x = 0$.
- ☐ possède un maximum local et un minimum global.
- ☐ est strictement croissante.
- ☐ possède un minimum local et un maximum global.

Question 5 (3 points)

Soit $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Laquelle des affirmations suivantes est-elle vraie?

- ☐ f' existe et est bornée sur $[0, \infty) \implies f$ est uniformément continue sur $[0, \infty)$.
- ☐ $f \in C^2([0, \infty)) \implies f$ est uniformément continue sur $[0, \infty)$.
- ☐ Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie.
- ☐ f est uniformément continue sur $[0, \infty) \implies f$ est dérivable sur $[0, \infty)$.



Question 6 (4 points)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors:

- ☐ g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = f''(0)$.
- ☐ g n'est pas dérivable en $x = 0$.
- ☐ g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = \frac{1}{2}f''(0)$.
- ☐ g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = f'(0)$.



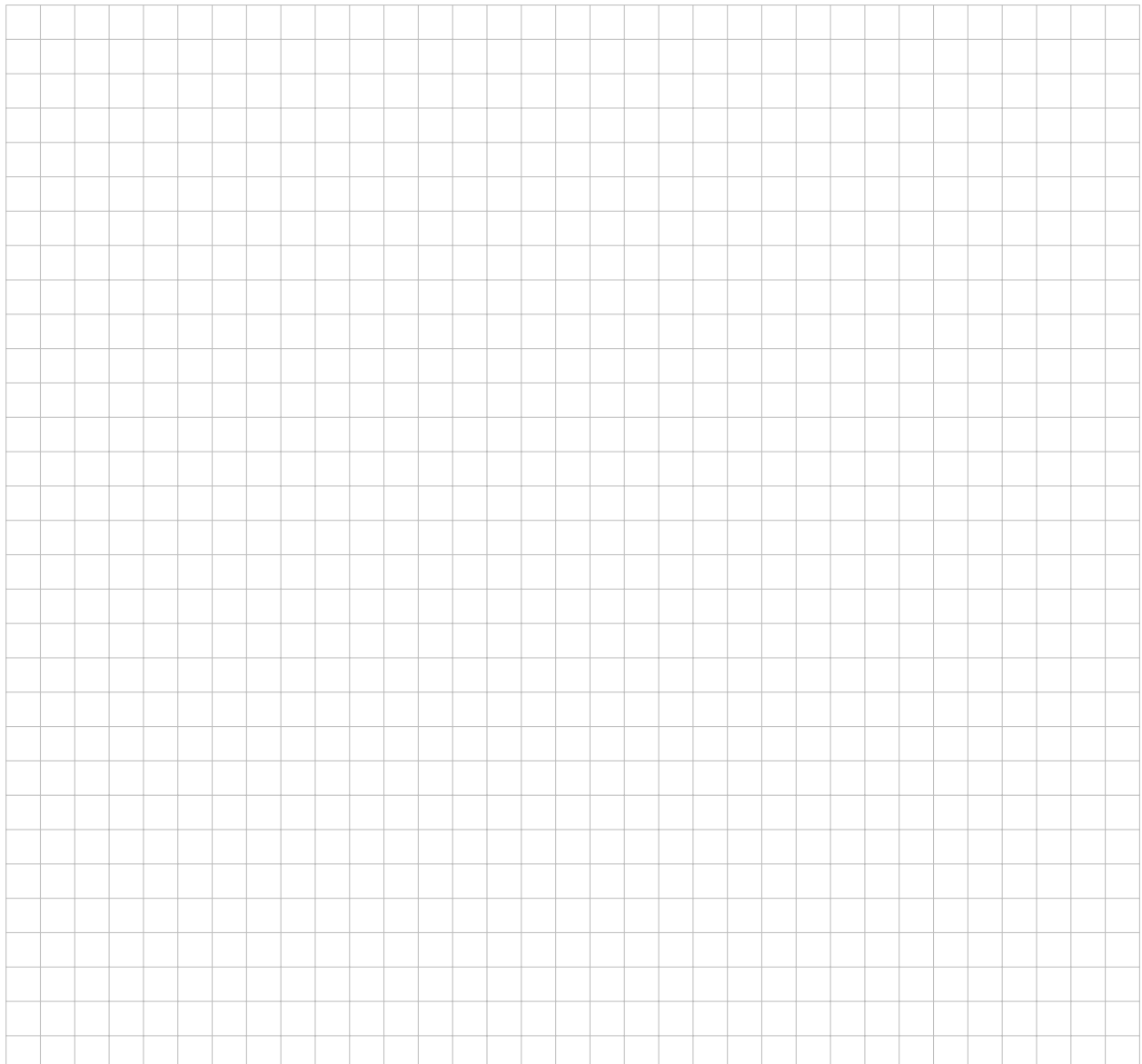
Deuxième partie, questions ouvertes (80 points)

Répondre dans l'espace dédié. Toutes les étapes de votre raisonnement et de vos calculs doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher, elles sont réservées à la correction.

Question 7: *Cette question est notée sur 10 points.*

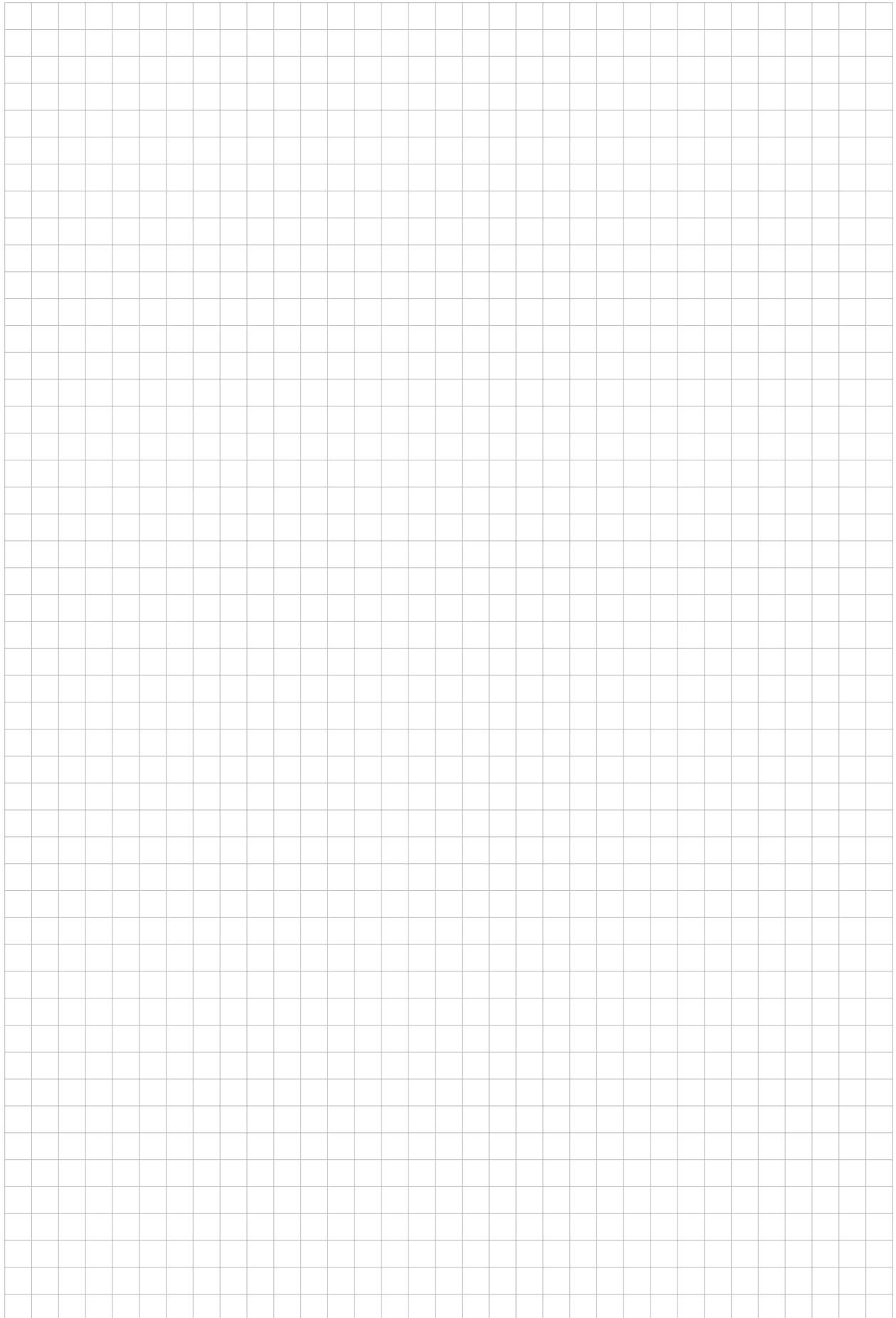
☐₀ ☐₁ ☐₂ ☐₃ ☐₄ ☐₅ ☐₆ ☐₇ ☐₈ ☐₉ ☐₁₀

- (a) Définir les termes suivants: (i) suite bornée; (ii) suite monotone; (iii) sous-suite.
- (b) Montrer que si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ n'est pas bornée, alors elle possède une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $|x_{n_k}| \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$).
- (c) Prouver qu'une suite monotone et bornée est convergente.



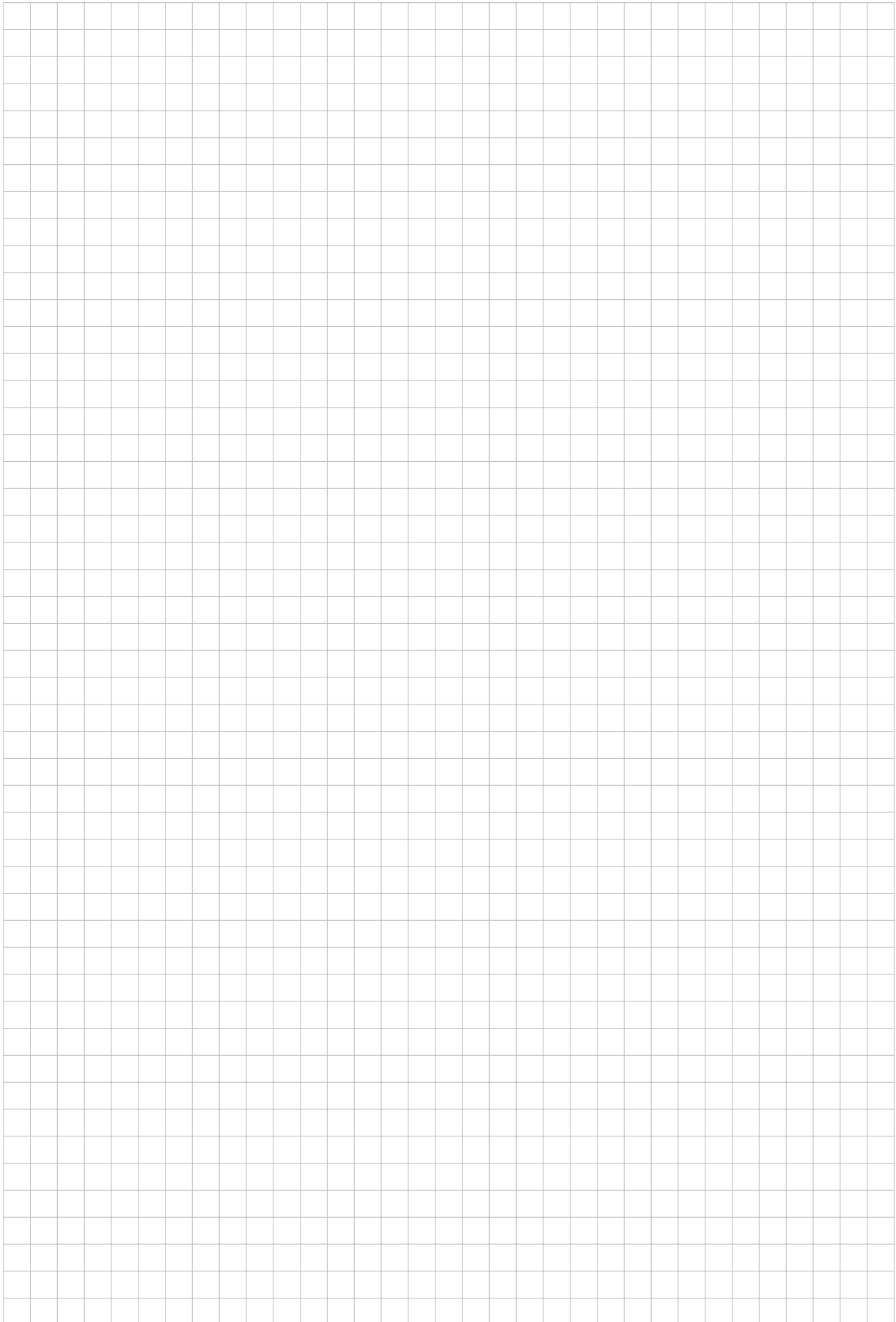


+1/5/56+





+1/6/55+





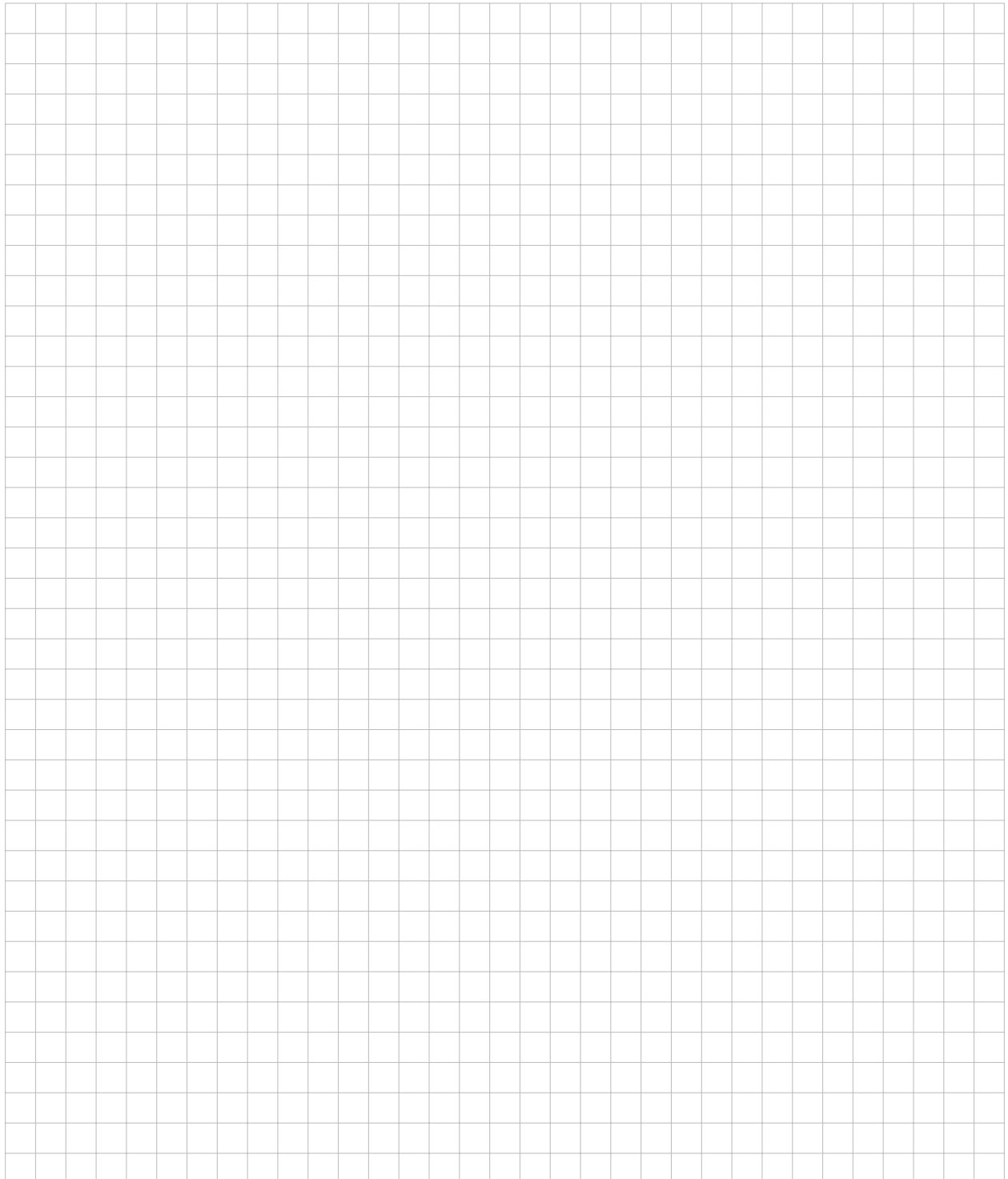
Question 8: *Cette question est notée sur 7 points.*

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇

Prouver que, pour tout $x_0 > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par

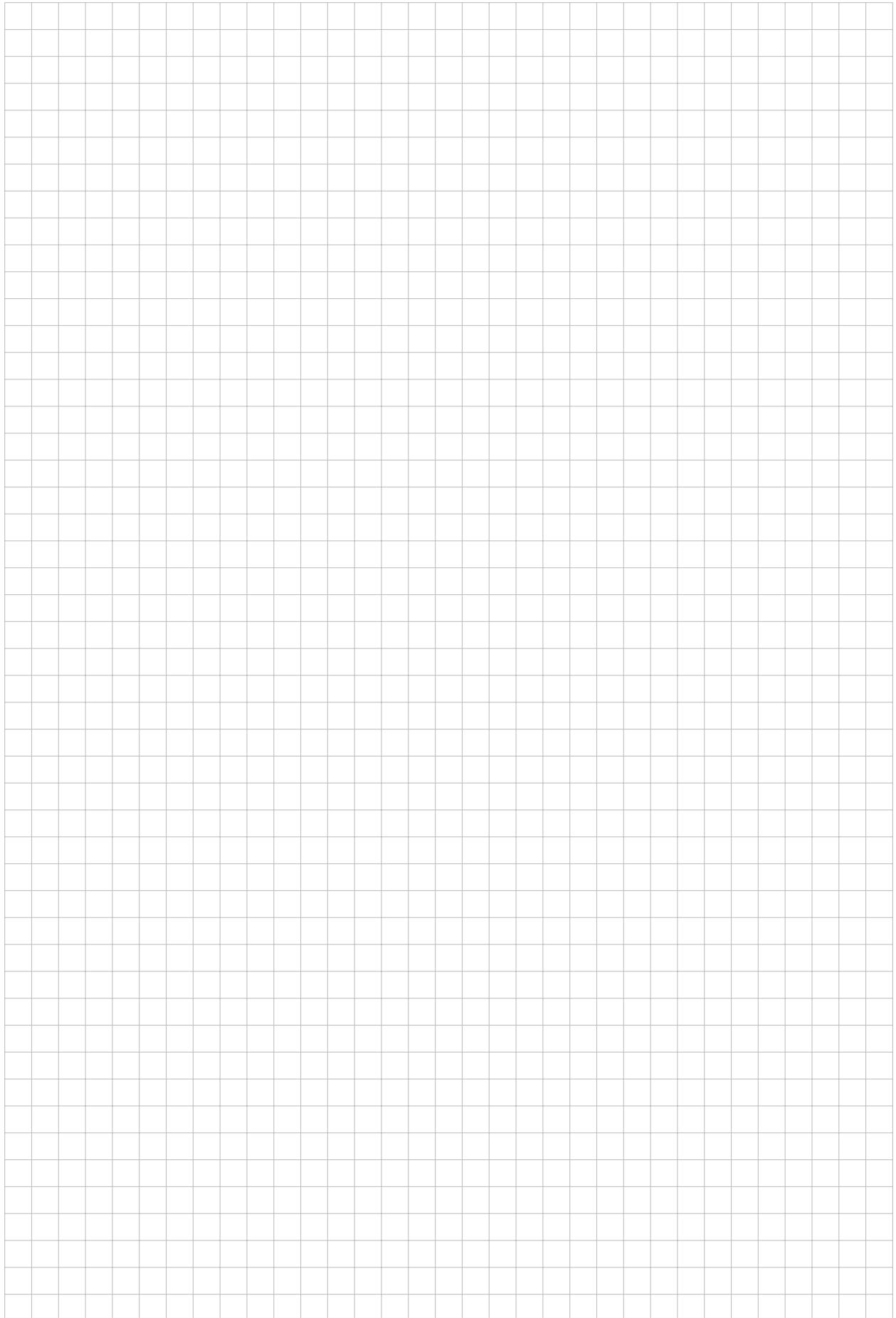
$$x_{n+1} = x_n - \ln(1 + \alpha x_n) \quad (n \geq 0)$$

est convergente. Puis calculer sa limite.





+1/8/53+

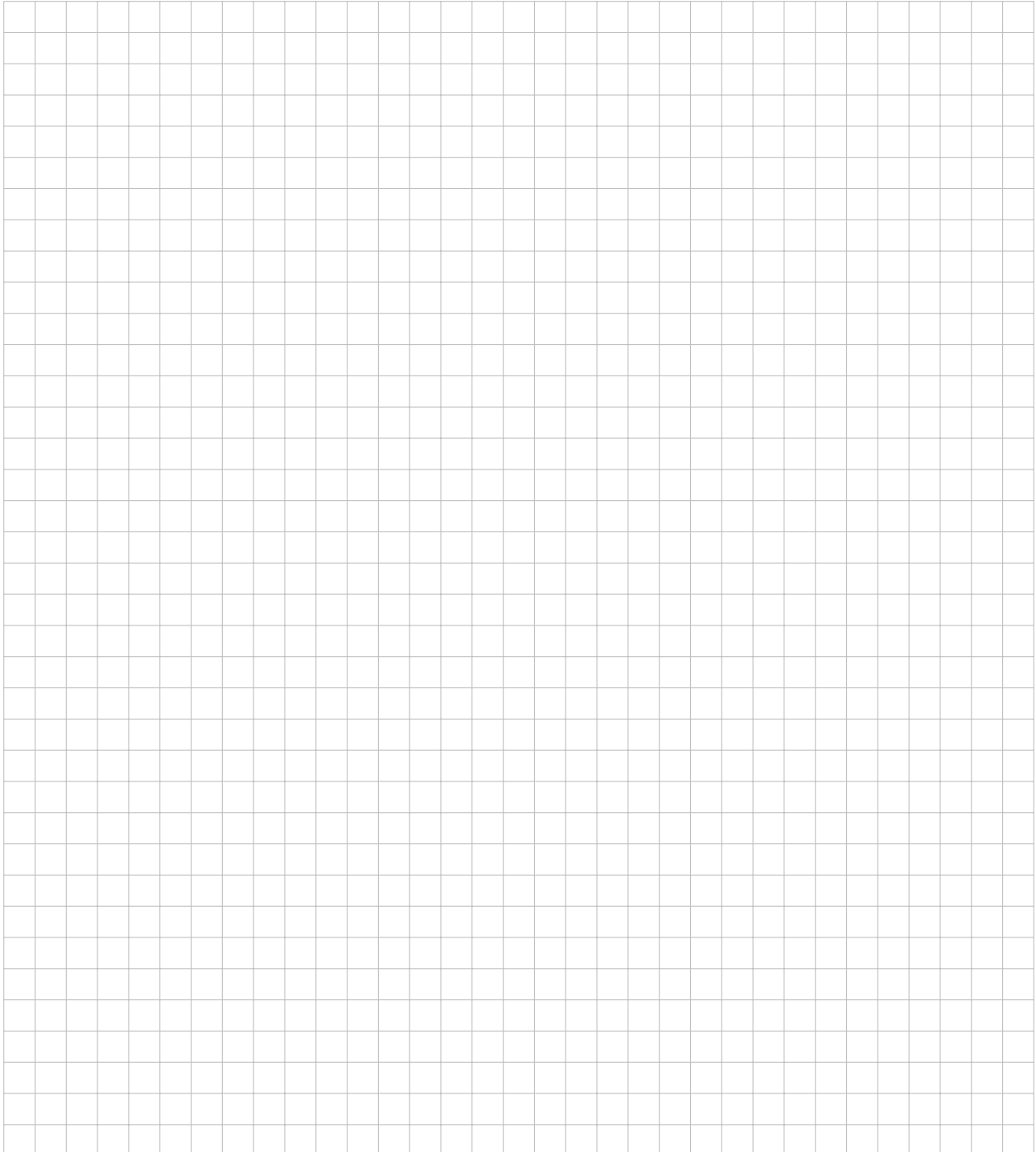


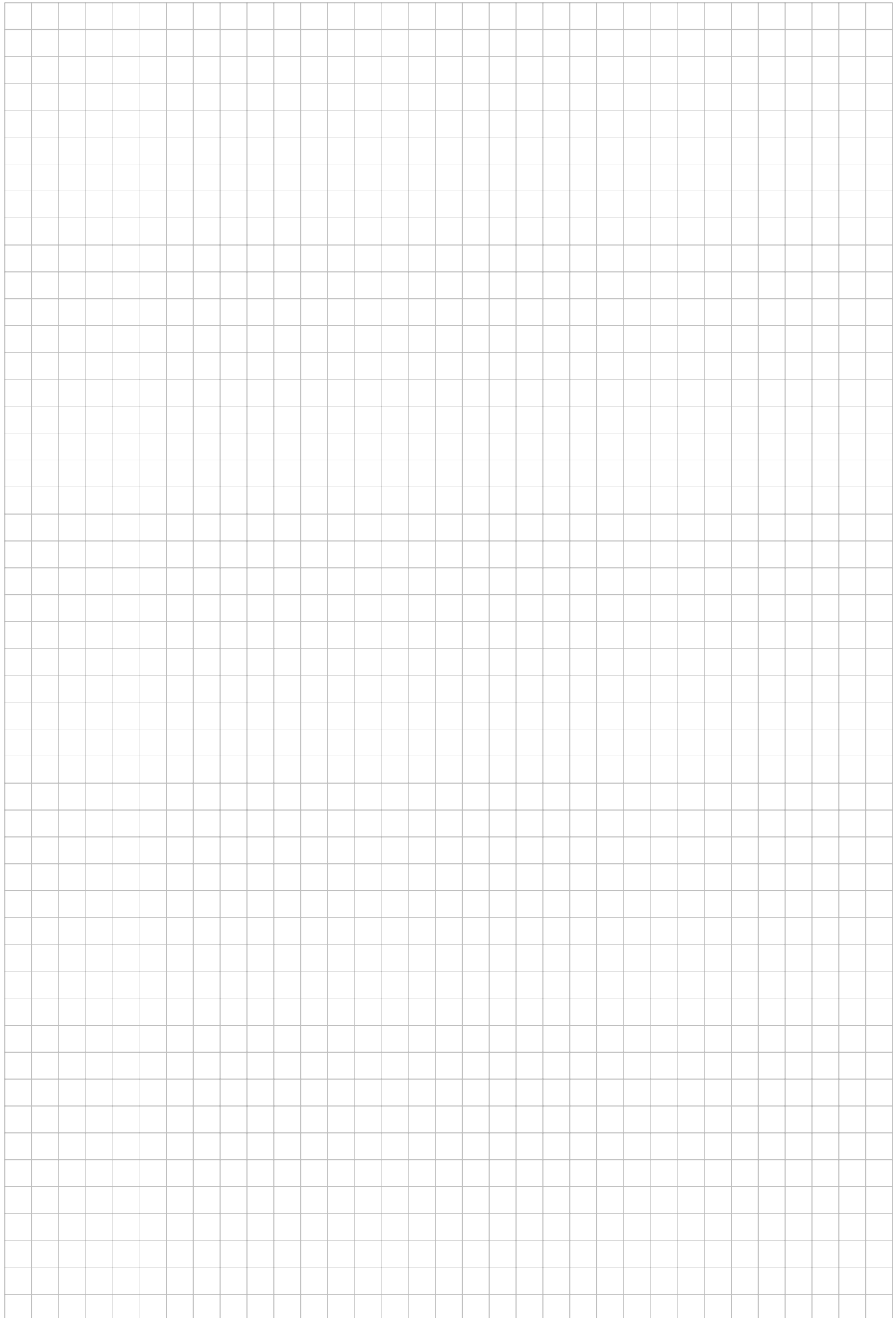


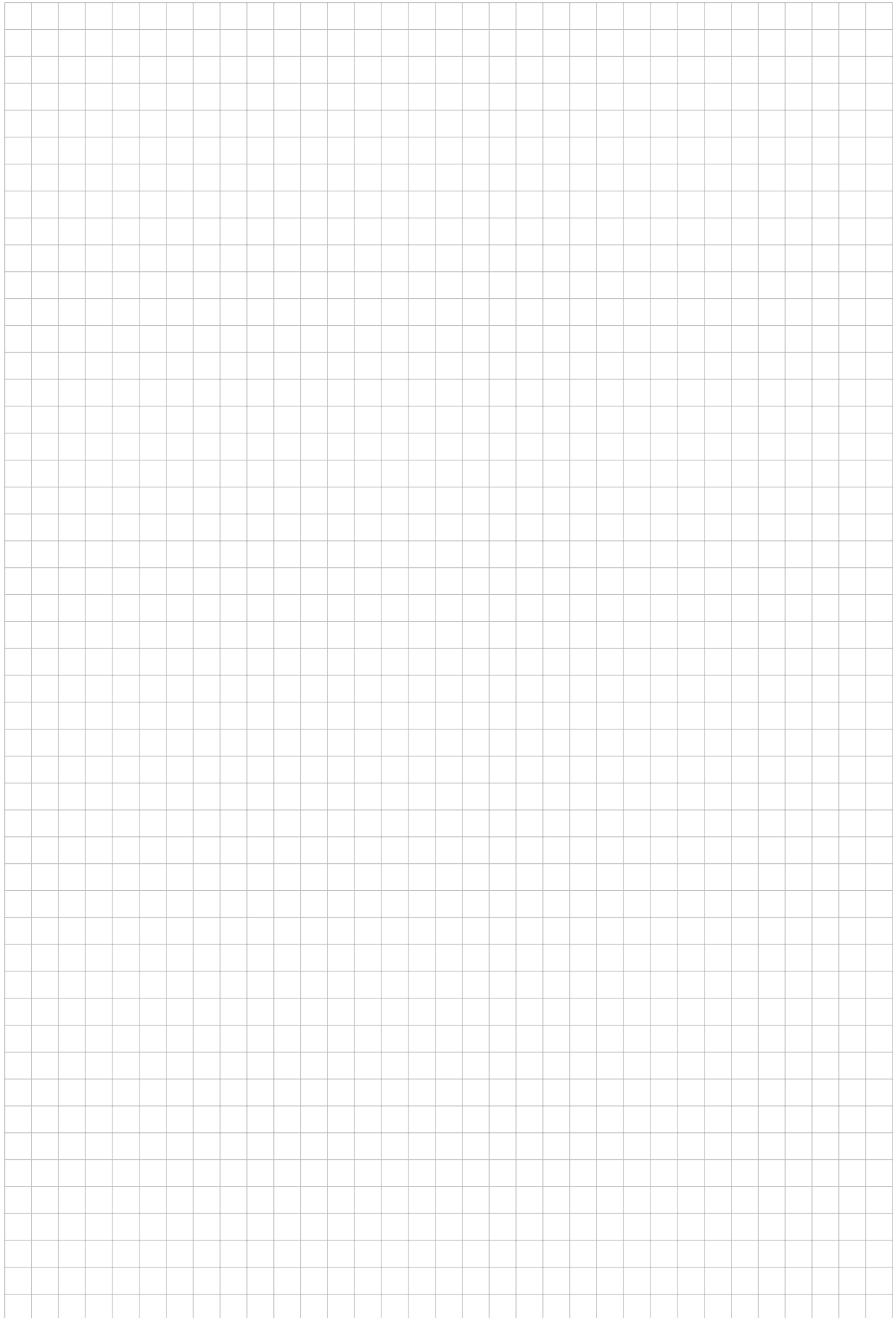
Question 9: *Cette question est notée sur 8 points.*

_0 _1 _2 _3 _4 _5 _6 _7 _8

- (a) Définir les assertions “ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge” et “ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolument”.
- (b) Prouver que: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolument $\implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
- (c) Donner un exemple de série qui converge mais ne converge pas absolument.









Question 10: Cette question est notée sur 11 points.

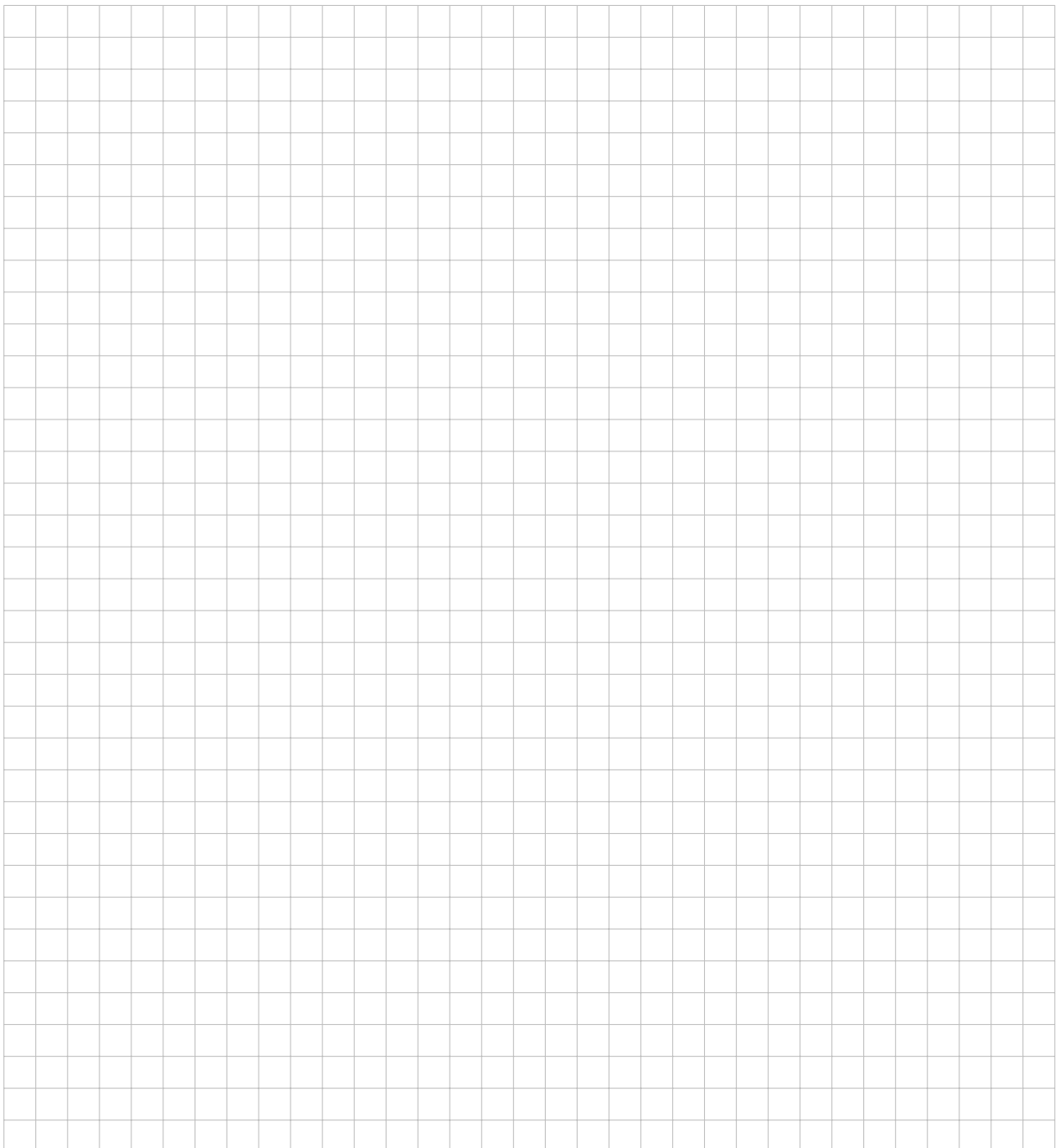
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11

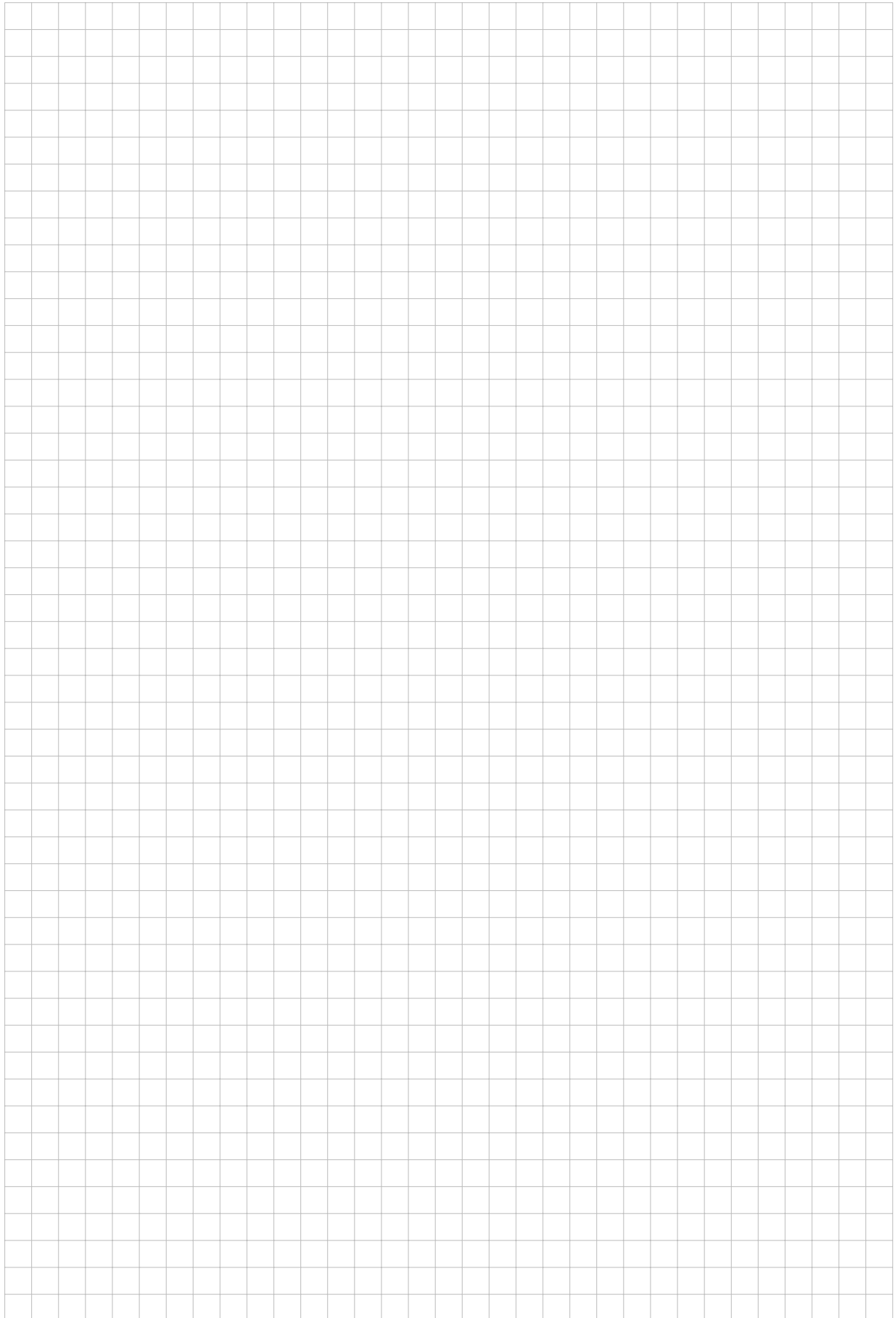
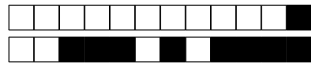
(a) Énoncer le critère de condensation de Cauchy utilisant la suite auxiliaire standard $a_n = 2^n$.

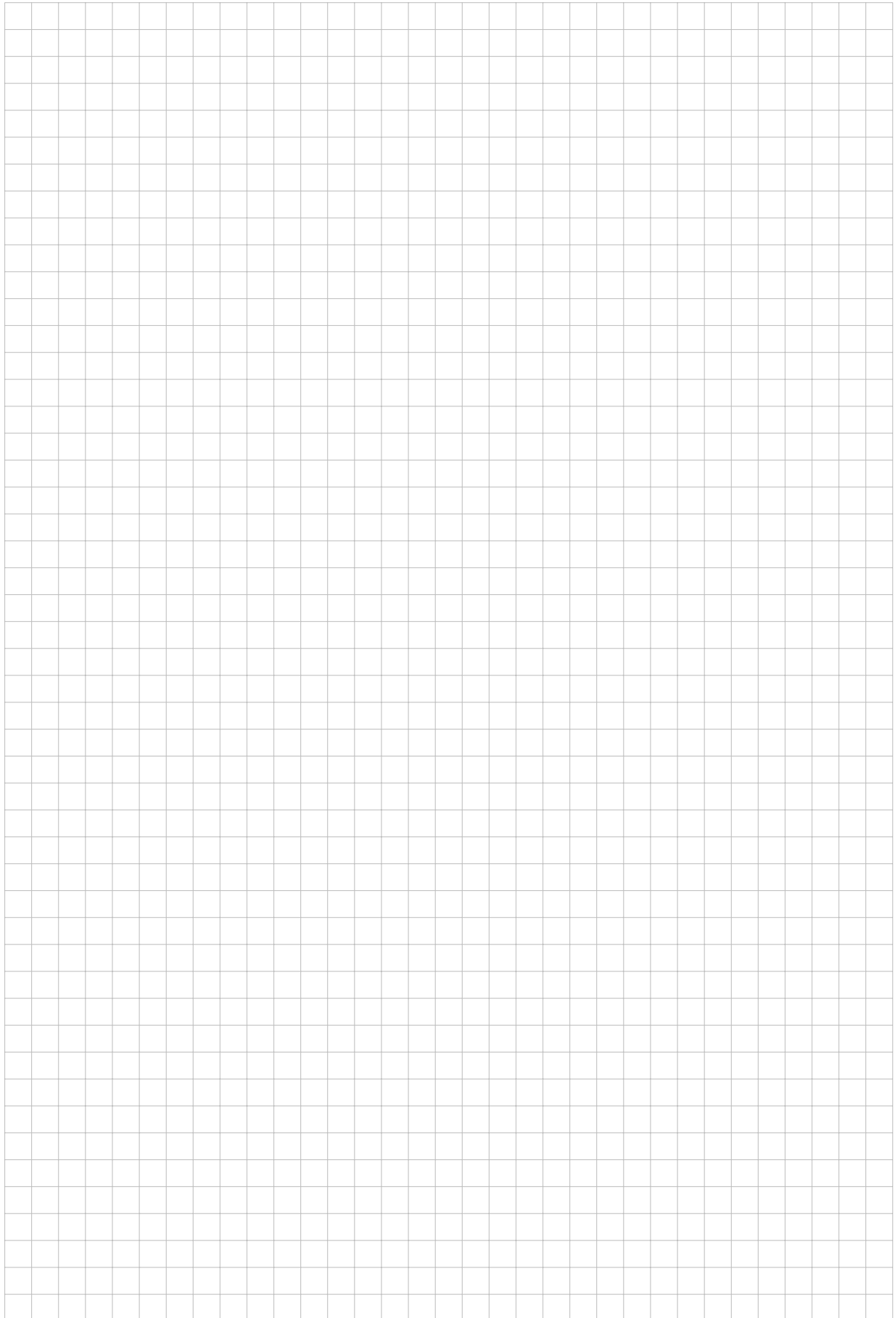
(b) Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes:

(i) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\pi - 2}$; (ii) $\sum_{n \geq 1} (e^{\frac{1}{n^\alpha}} - e^{\frac{1}{(n+1)^\alpha}})$ ($\alpha > 0$); (iii) $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$.

Indication: Utiliser un critère de comparaison et/ou le critère de condensation.









Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

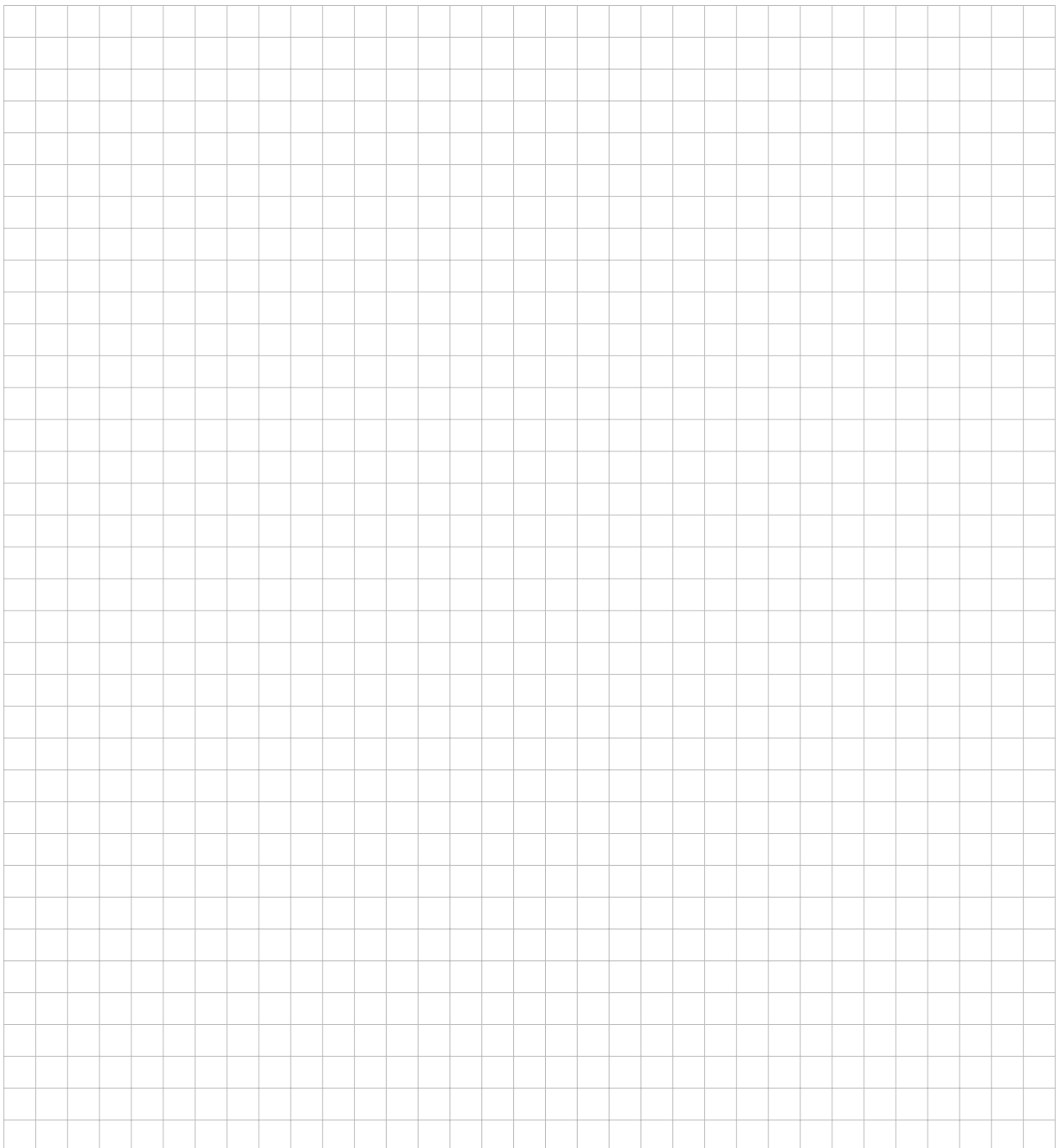
_0 _1 _2 _3 _4 _5 _6 _7

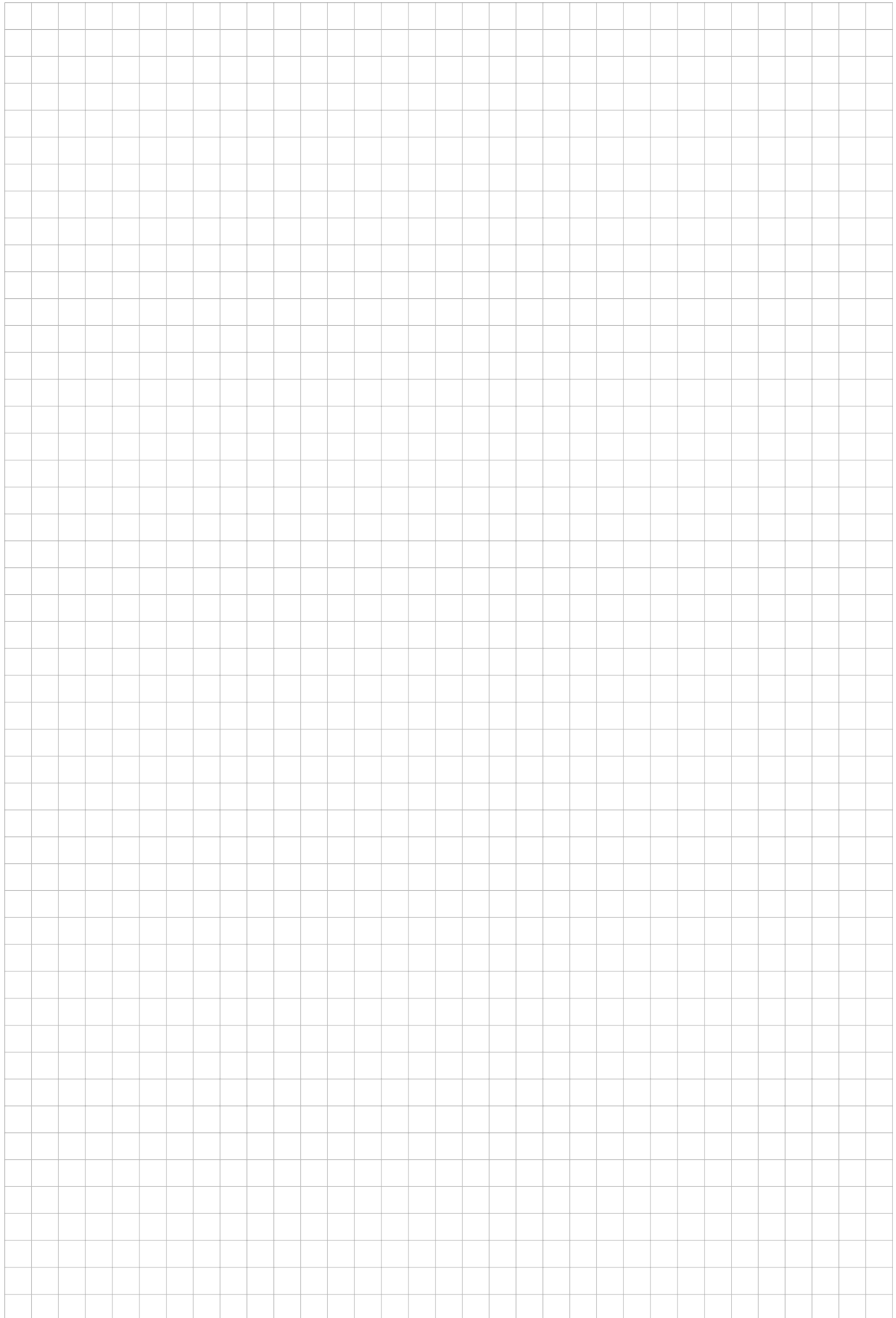
(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

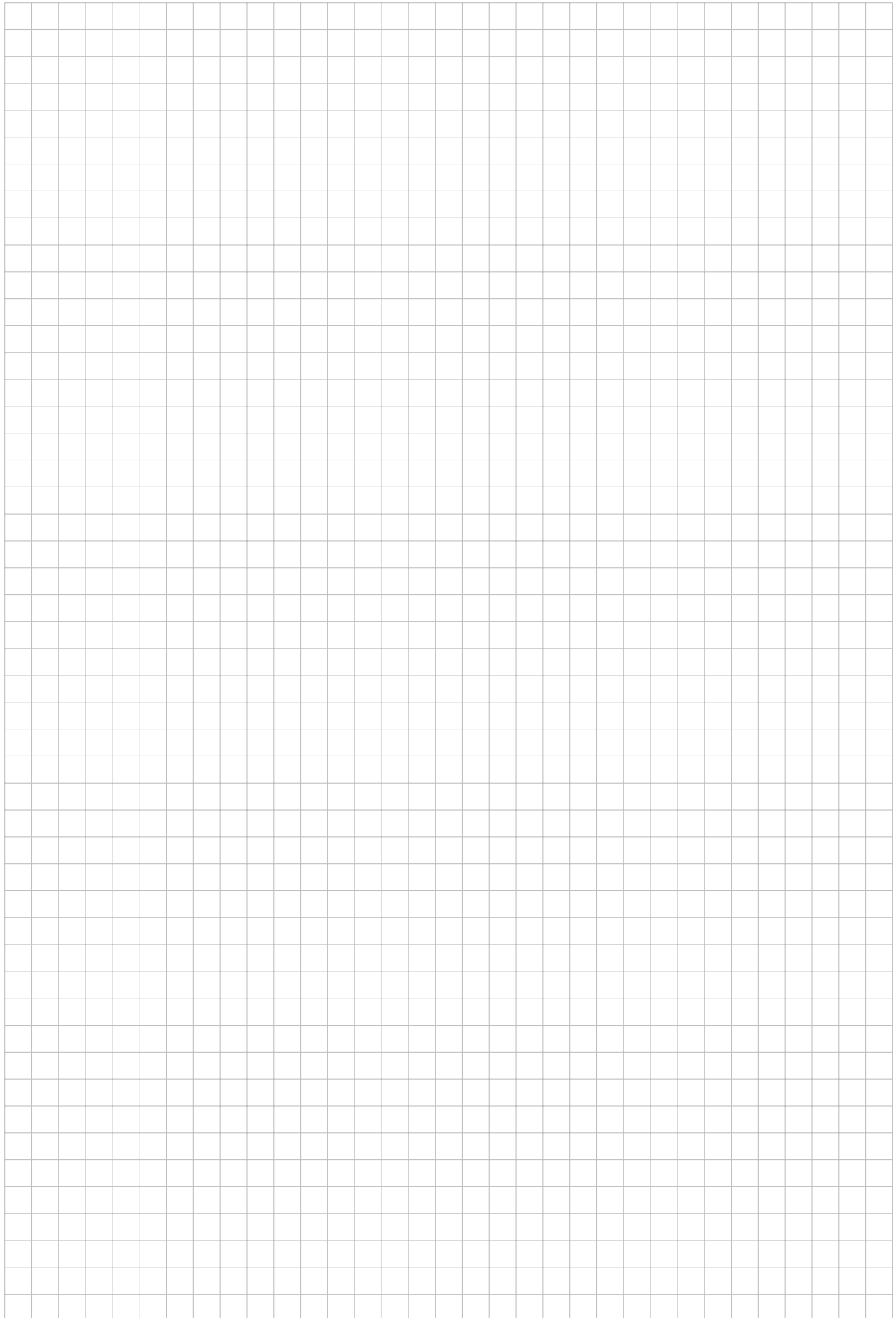
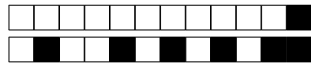
(i) Prouver que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(ii) La réciproque est-elle vraie? Justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

(b) Déterminer tous les points où la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ est continue.









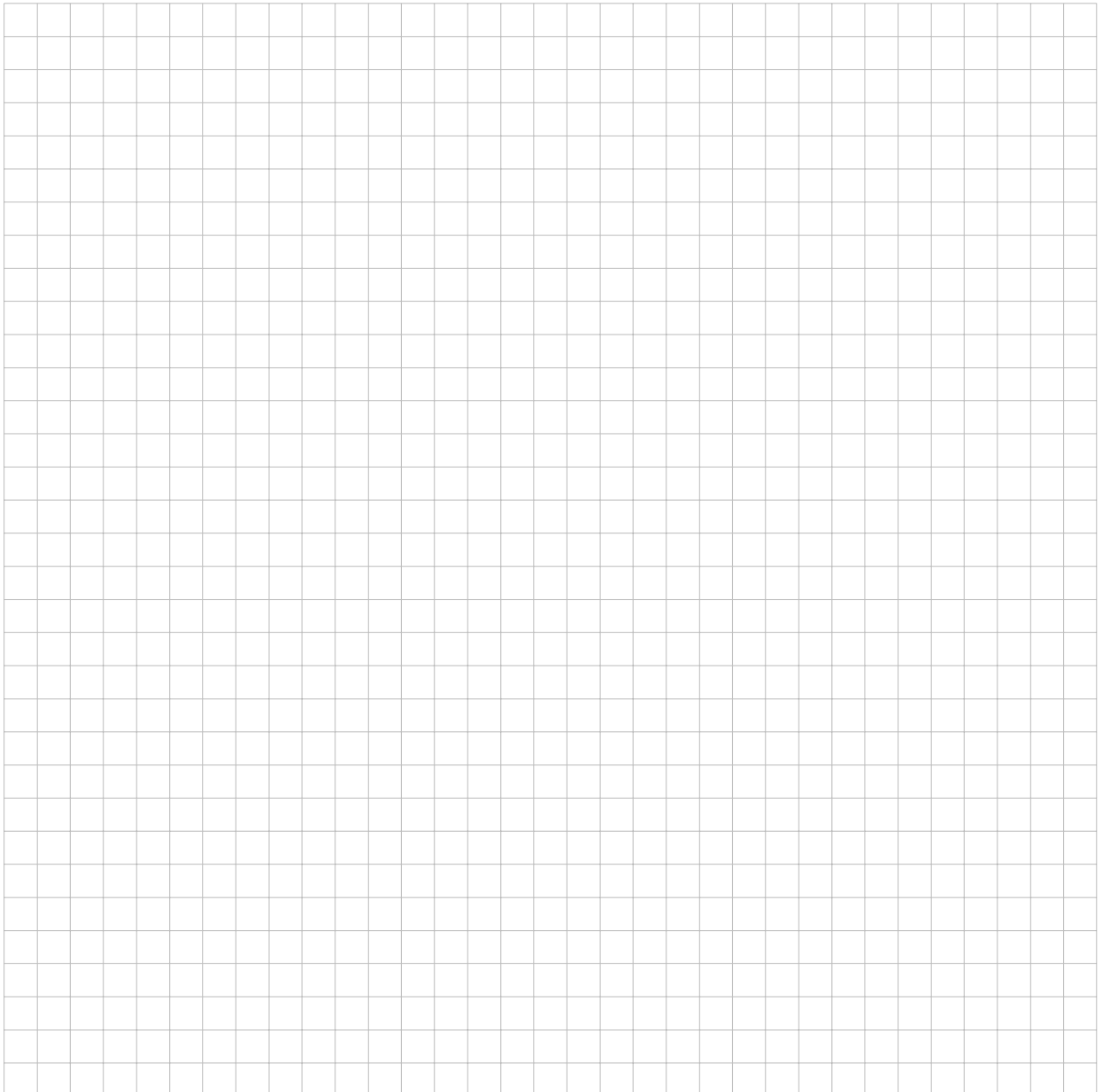
Question 12: Cette question est notée sur 10 points.

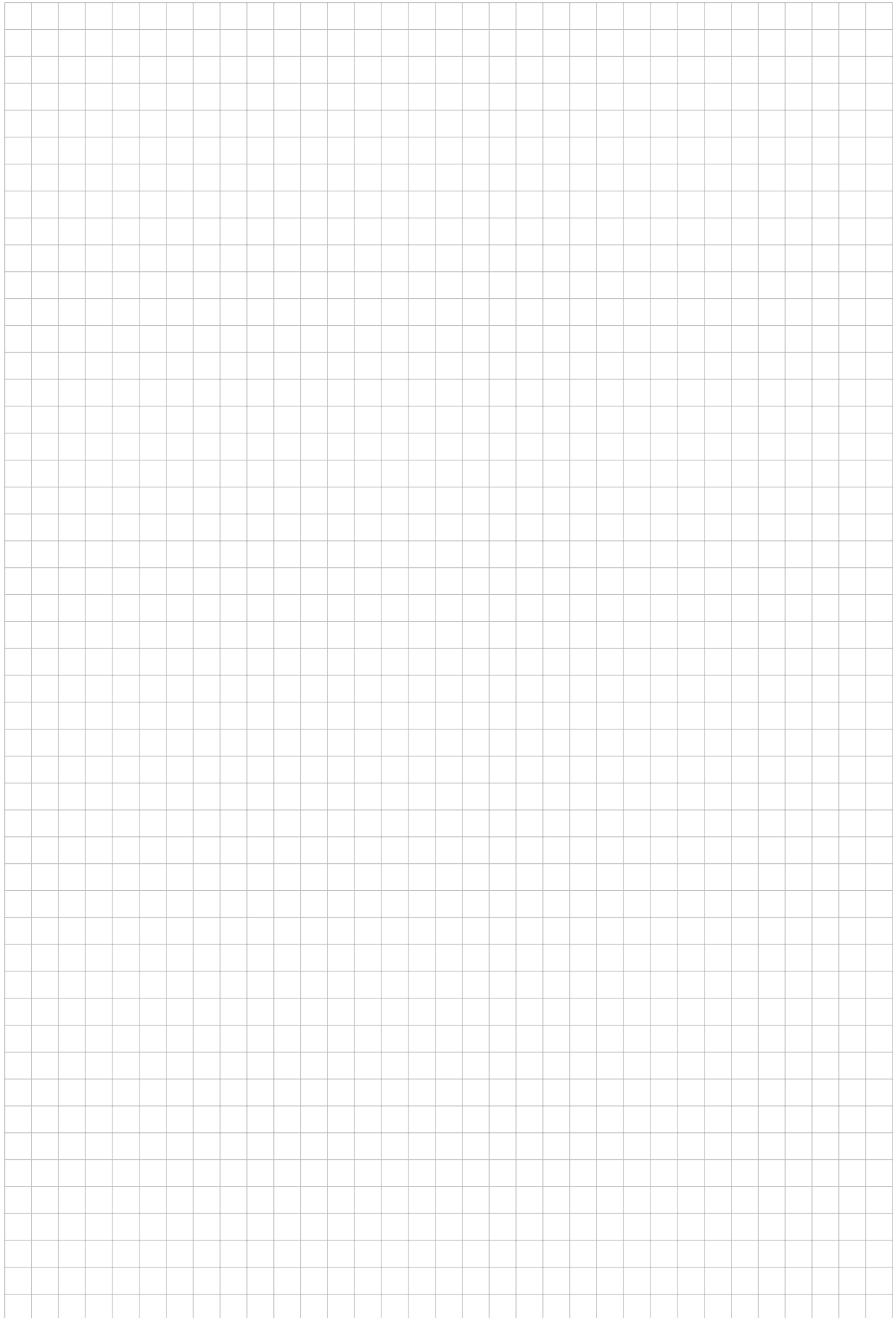
_0 _1 _2 _3 _4 _5 _6 _7 _8 _9 _10

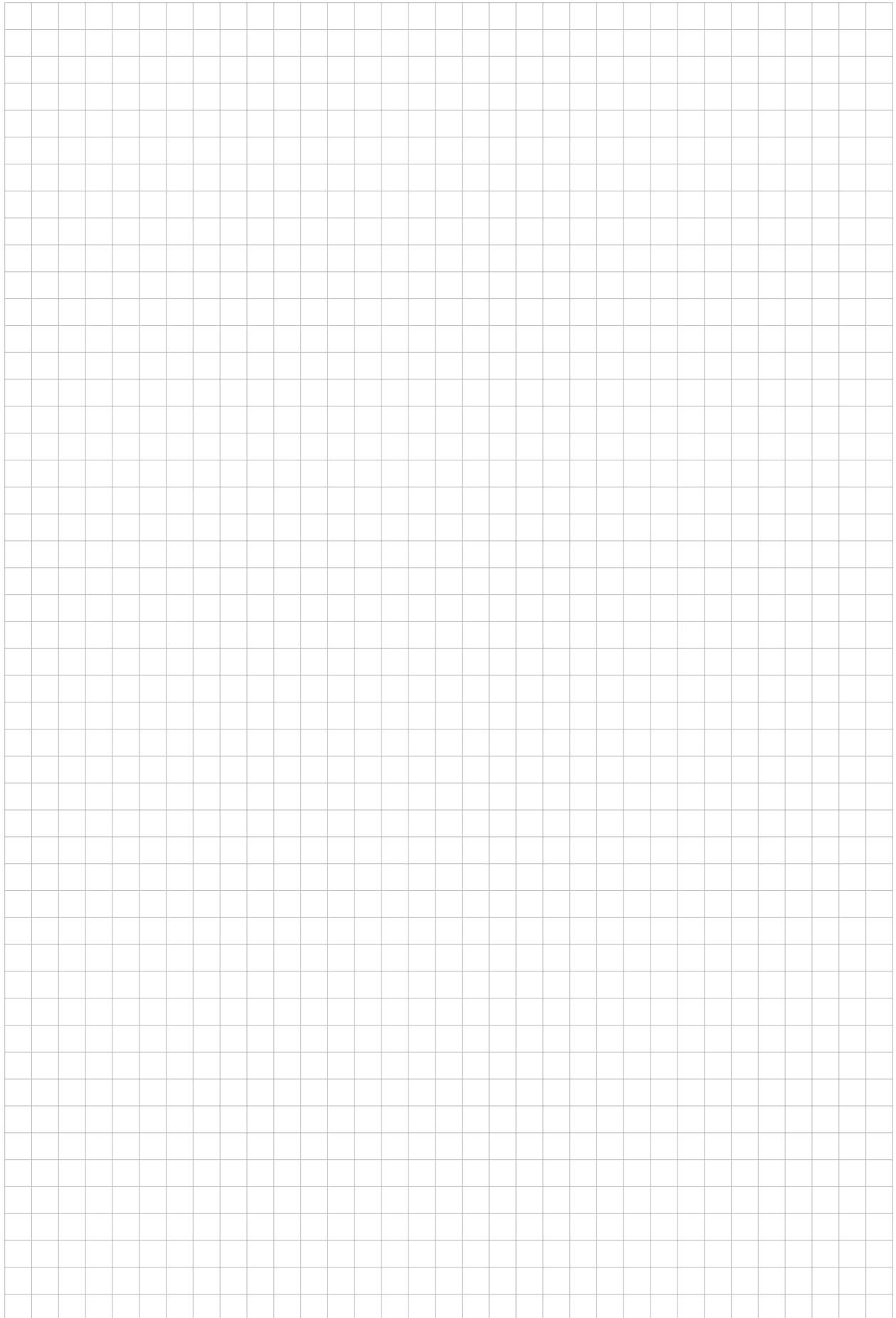
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

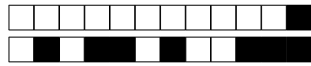
$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin(\frac{1}{x})) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$ a-t-on $f \in C^k(\mathbb{R})$? Justifier rigoureusement votre réponse.
- (c) Prouver que f a un minimum global en $x = 0$ mais n'est monotone sur aucun intervalle de la forme $(-\varepsilon, 0)$ ou $(0, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.







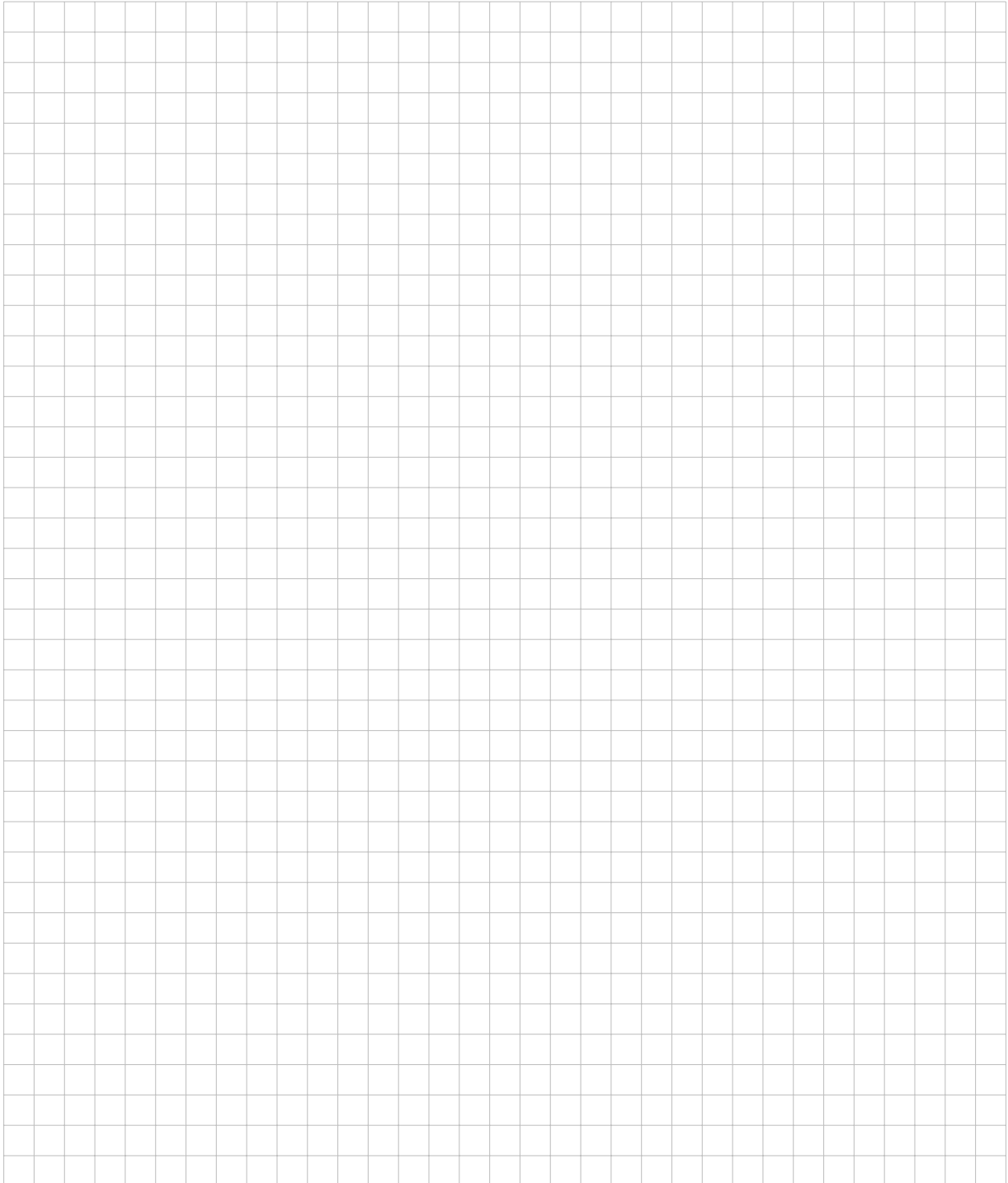


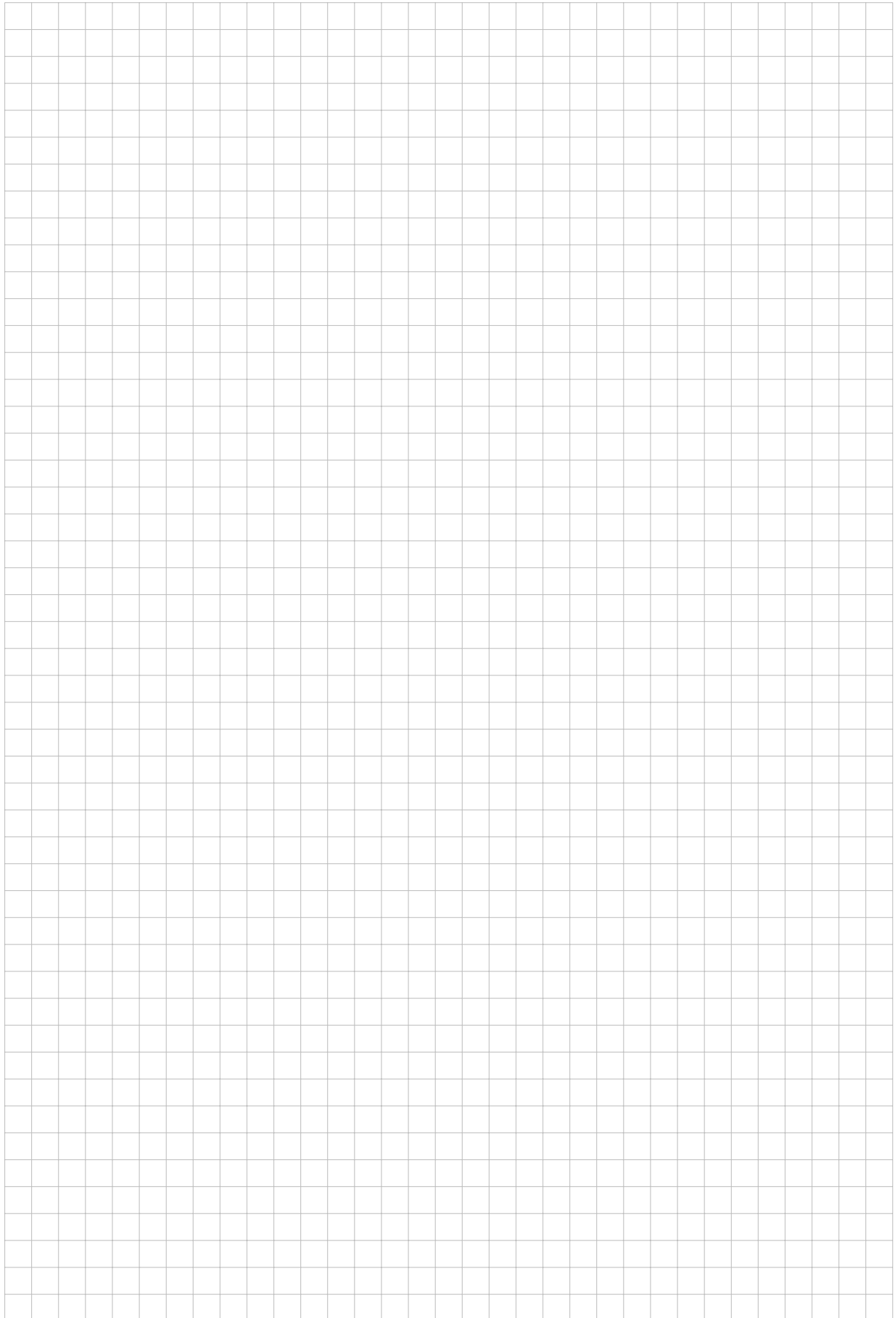
Question 13: *Cette question est notée sur 7 points.*

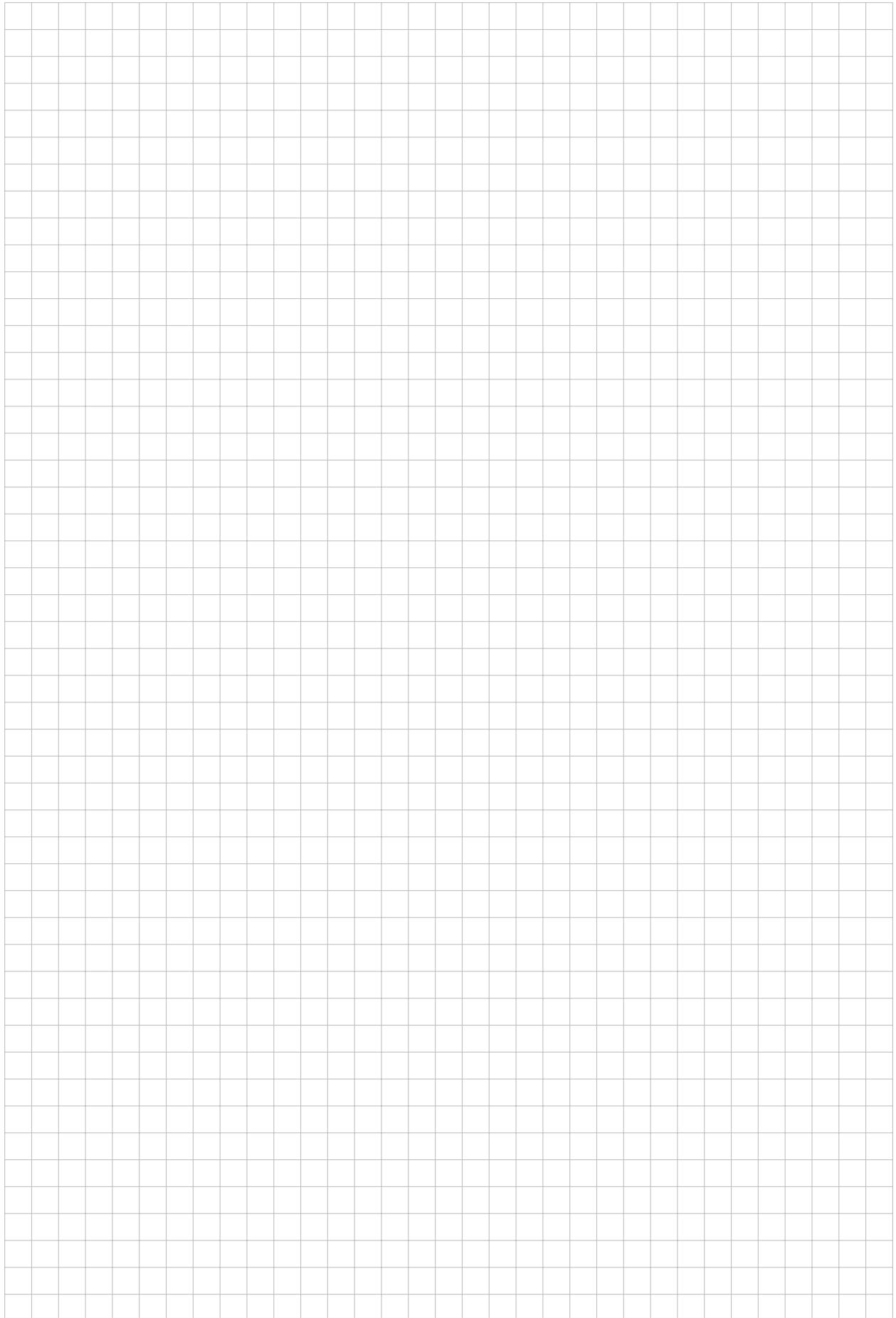
_0 _1 _2 _3 _4 _5 _6 _7

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 autour de $x = 0$ de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{e^{\cos(x)}}.$$







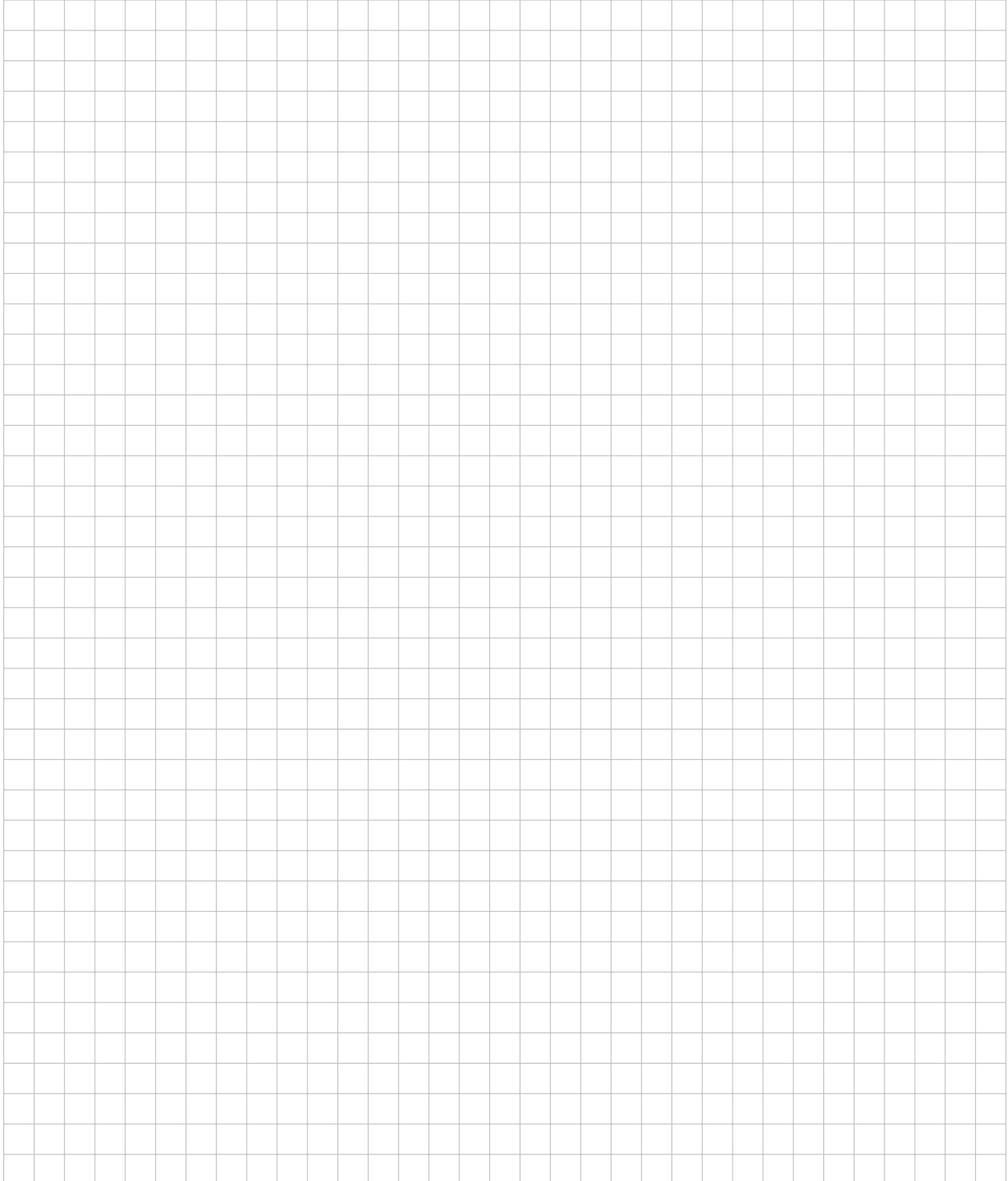


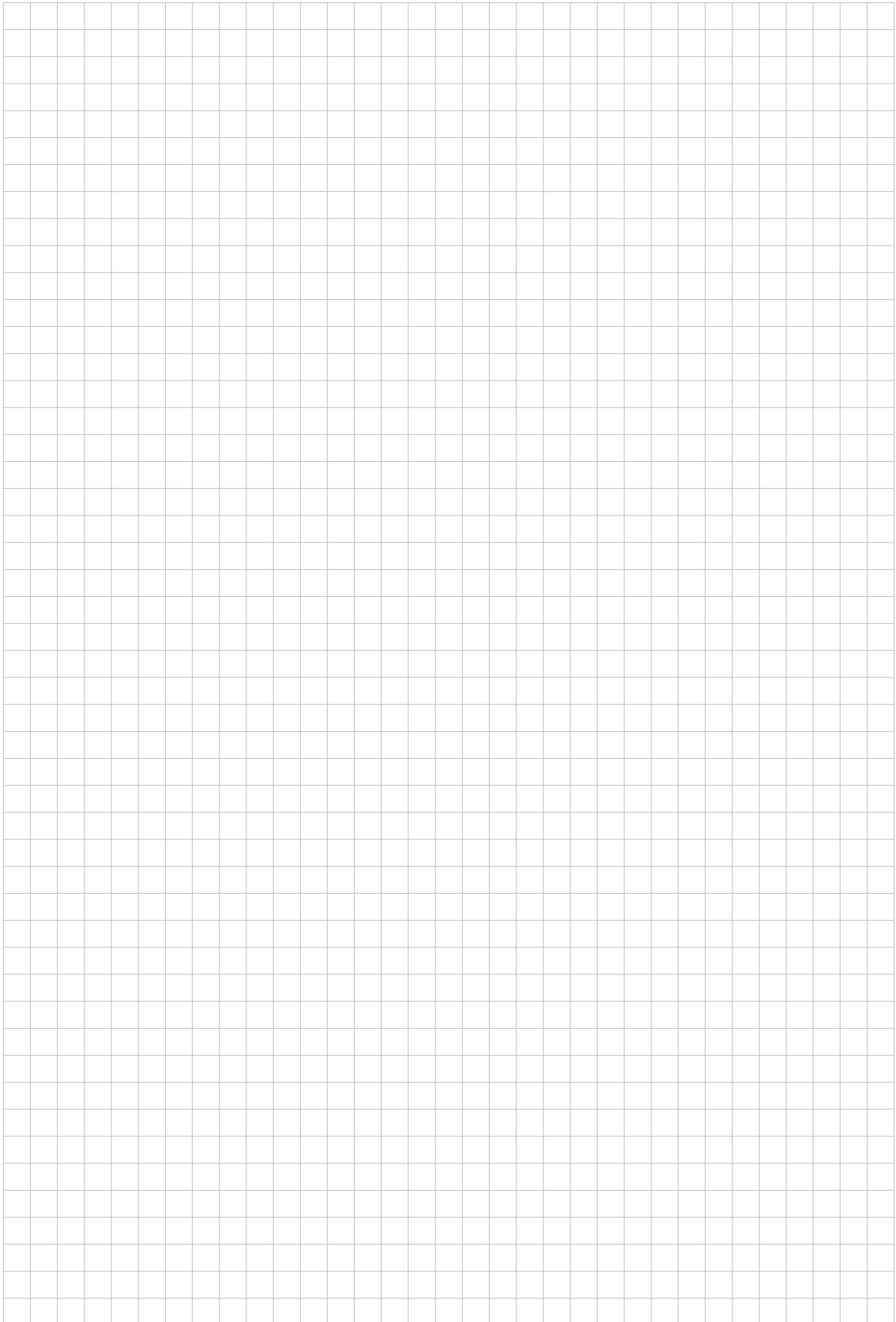
Question 14: *Cette question est notée sur 7 points.*

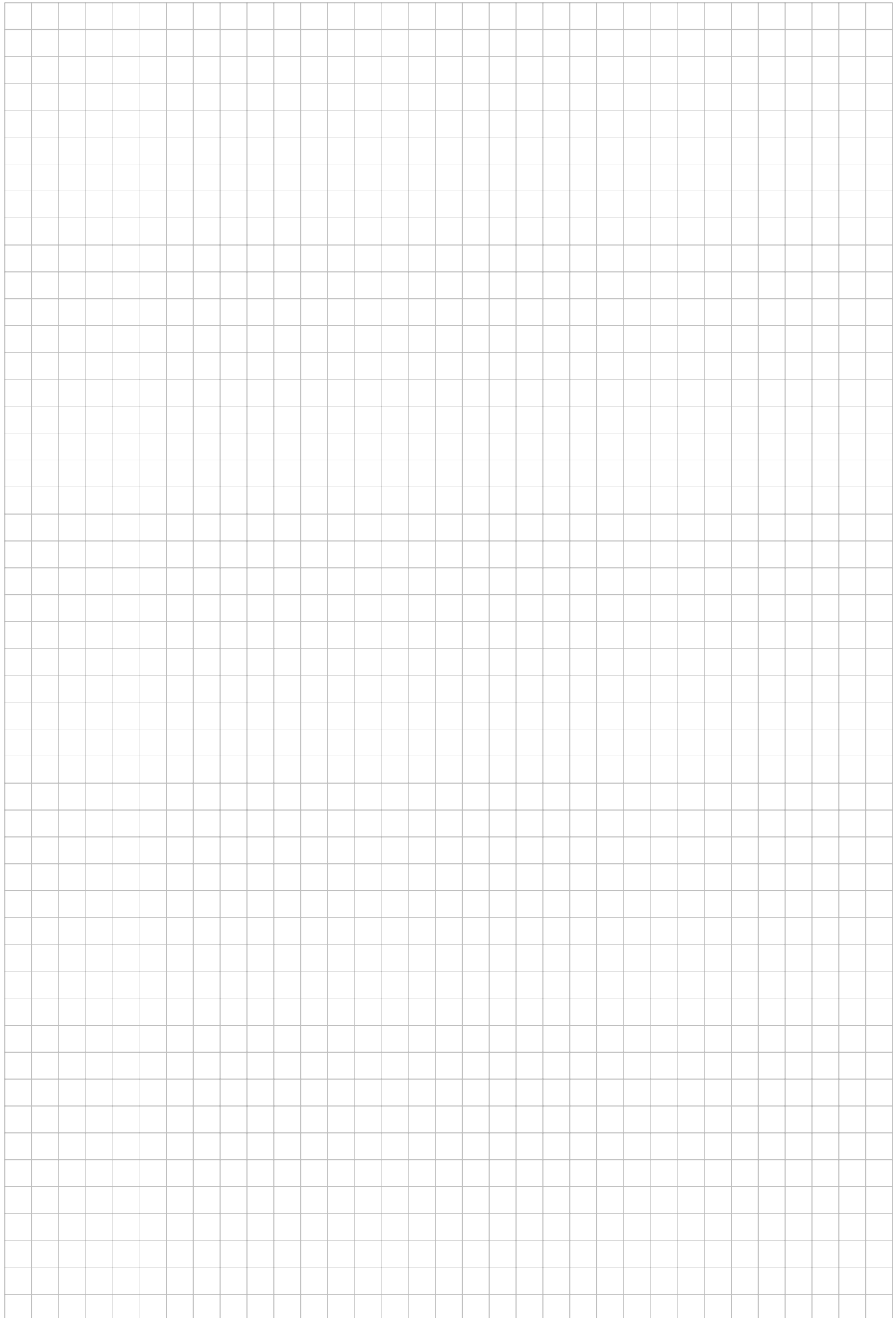
₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇

Déterminer les limites ponctuelles des suites de fonctions suivantes, puis déterminer dans chaque cas si la convergence est uniforme:

(i) $f_n(x) = \frac{\tanh(nx^2)}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$; (ii) $g_n(x) = x \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.







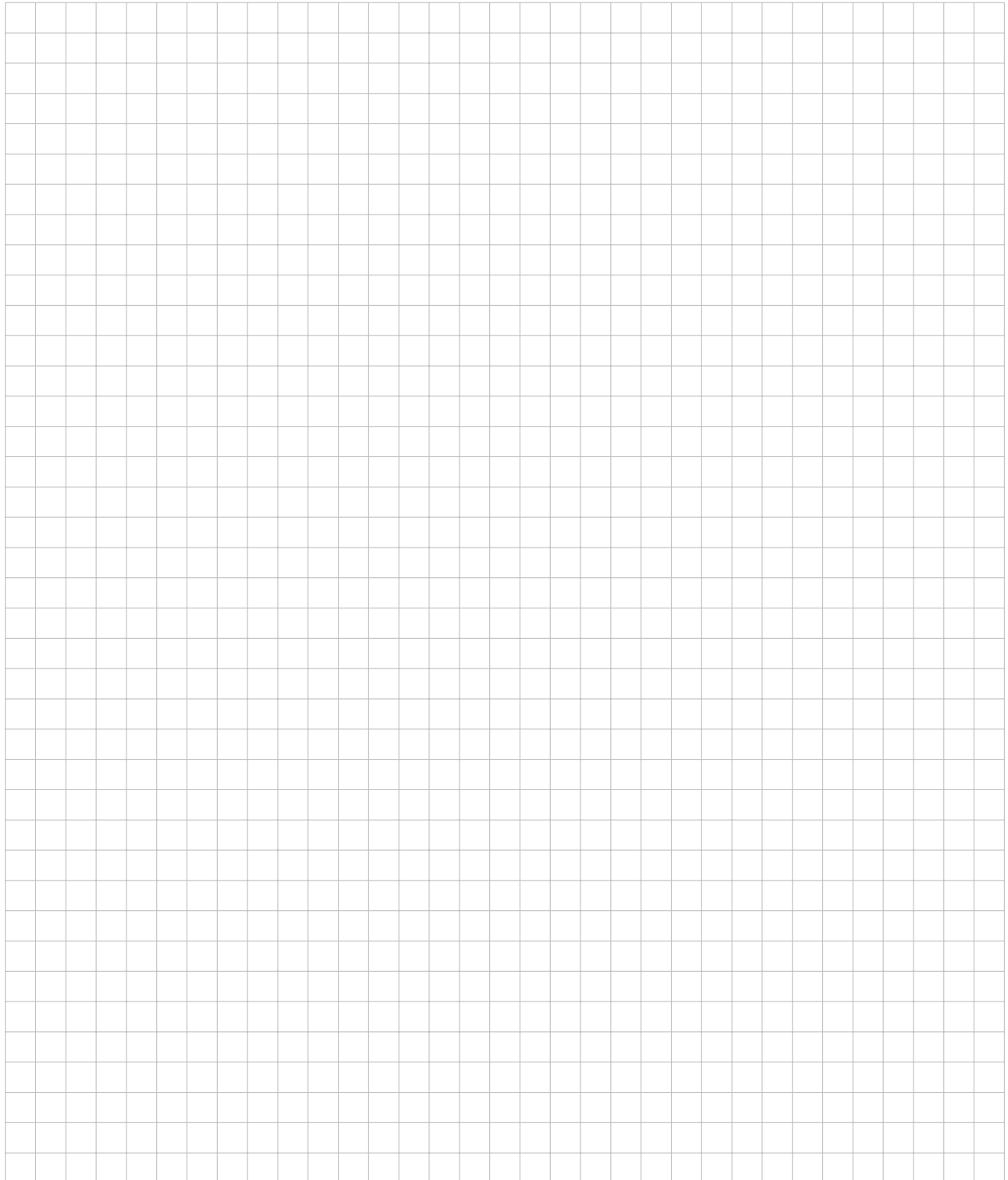


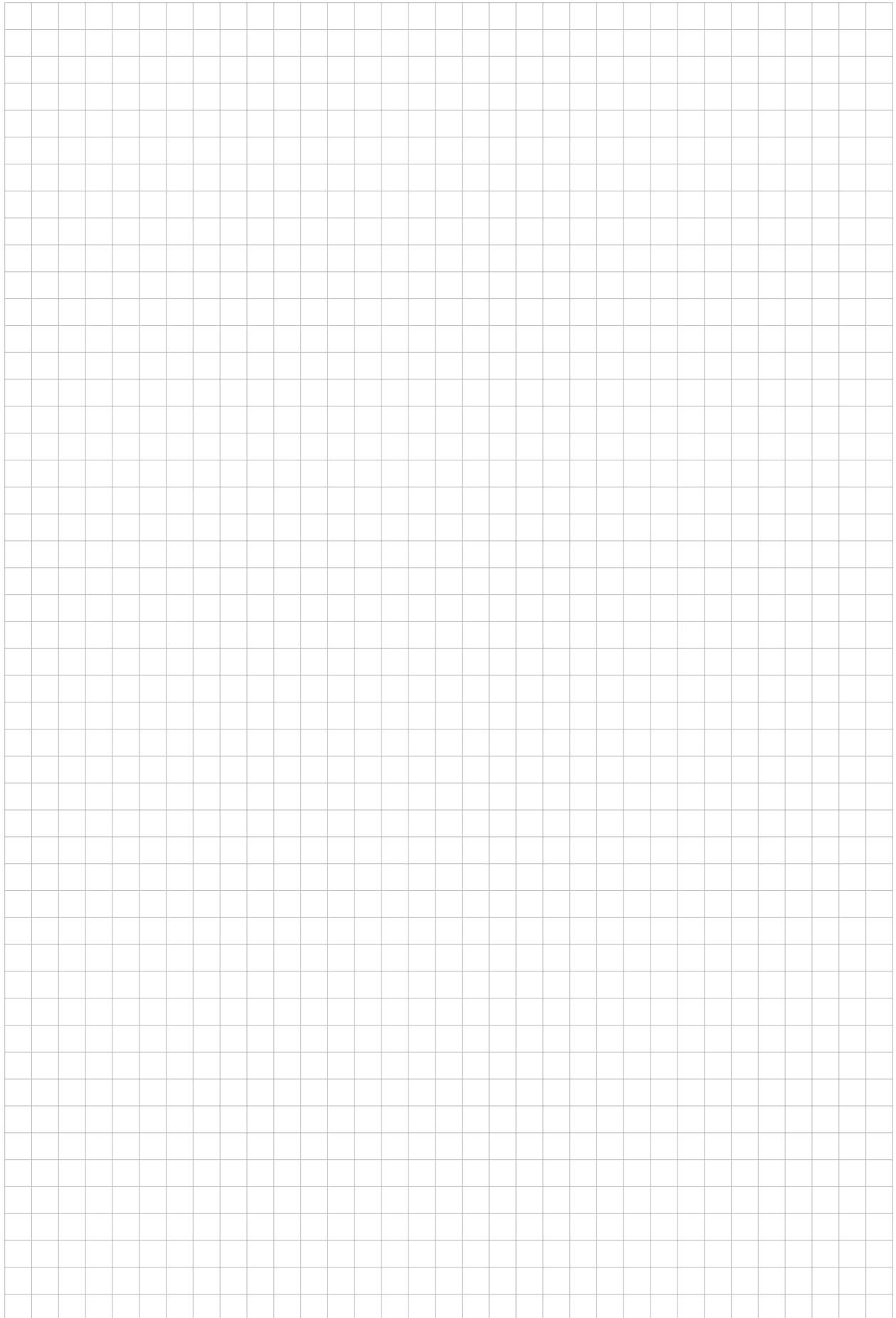
Question 15: *Cette question est notée sur 7 points.*

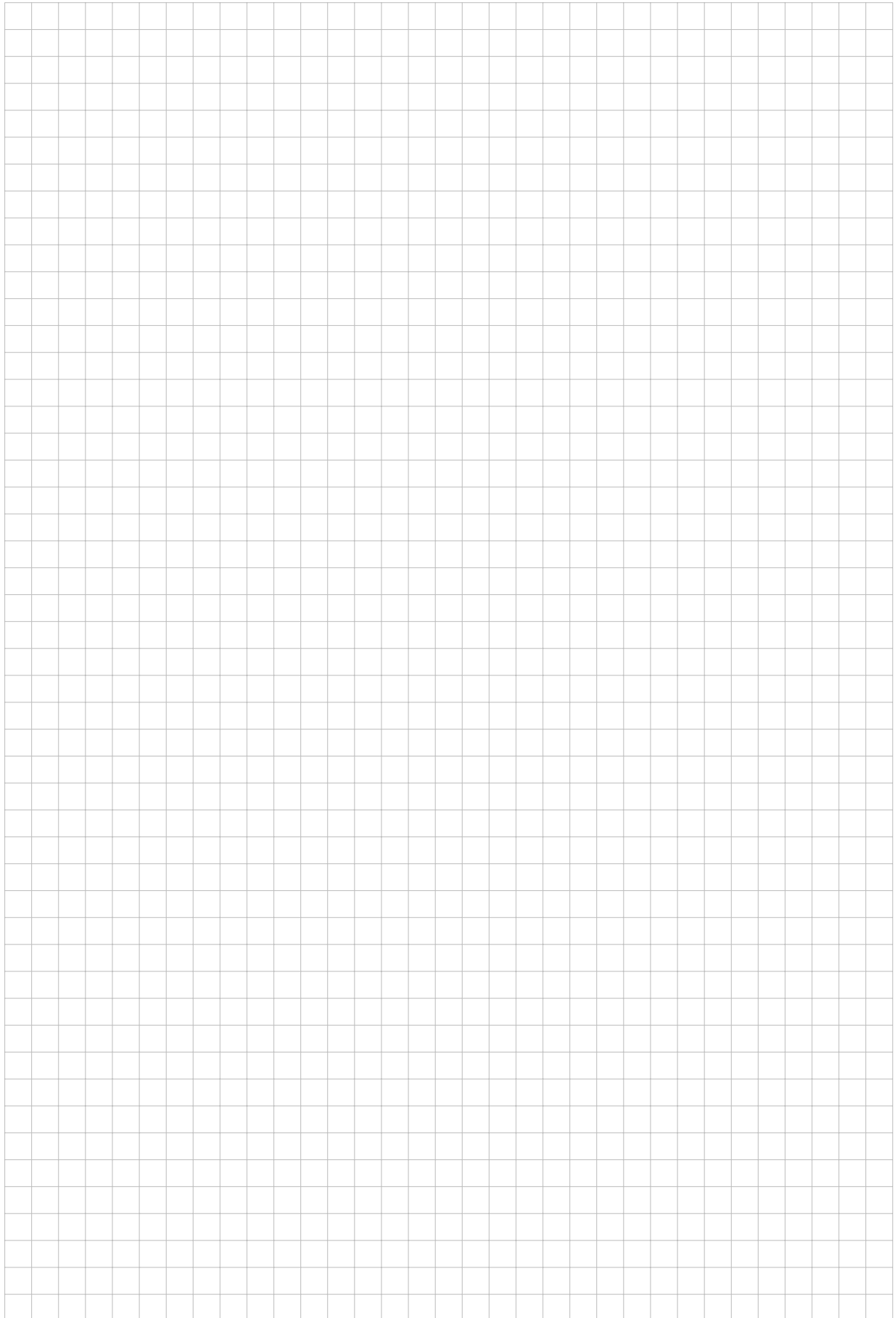
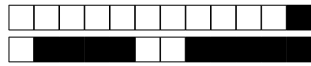
₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇

Etudier, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^\alpha}{\sinh(\ln(x))} dx.$$









Question 16: *Cette question est notée sur 6 points.*

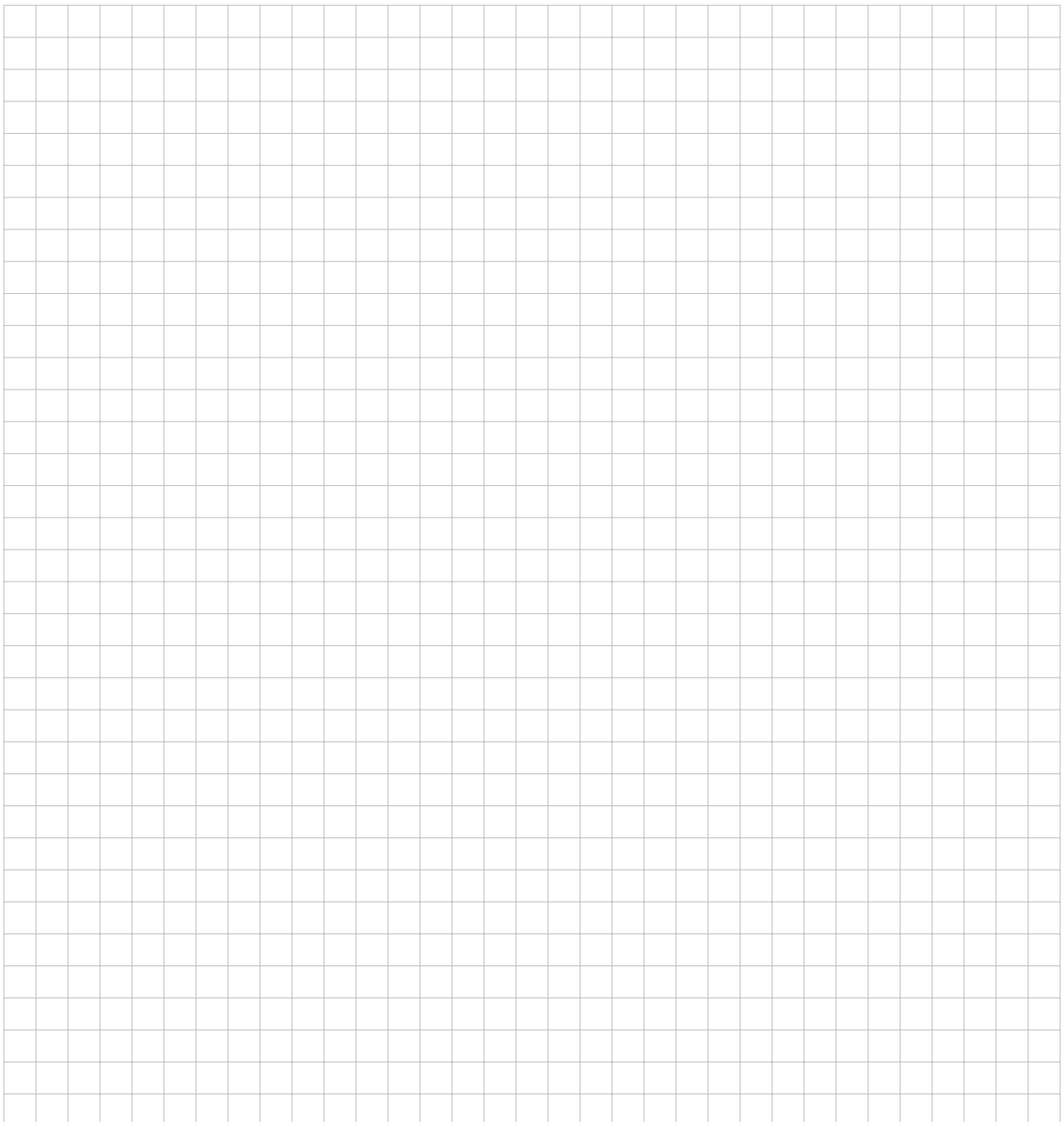
_0 _1 _2 _3 _4 _5 _6

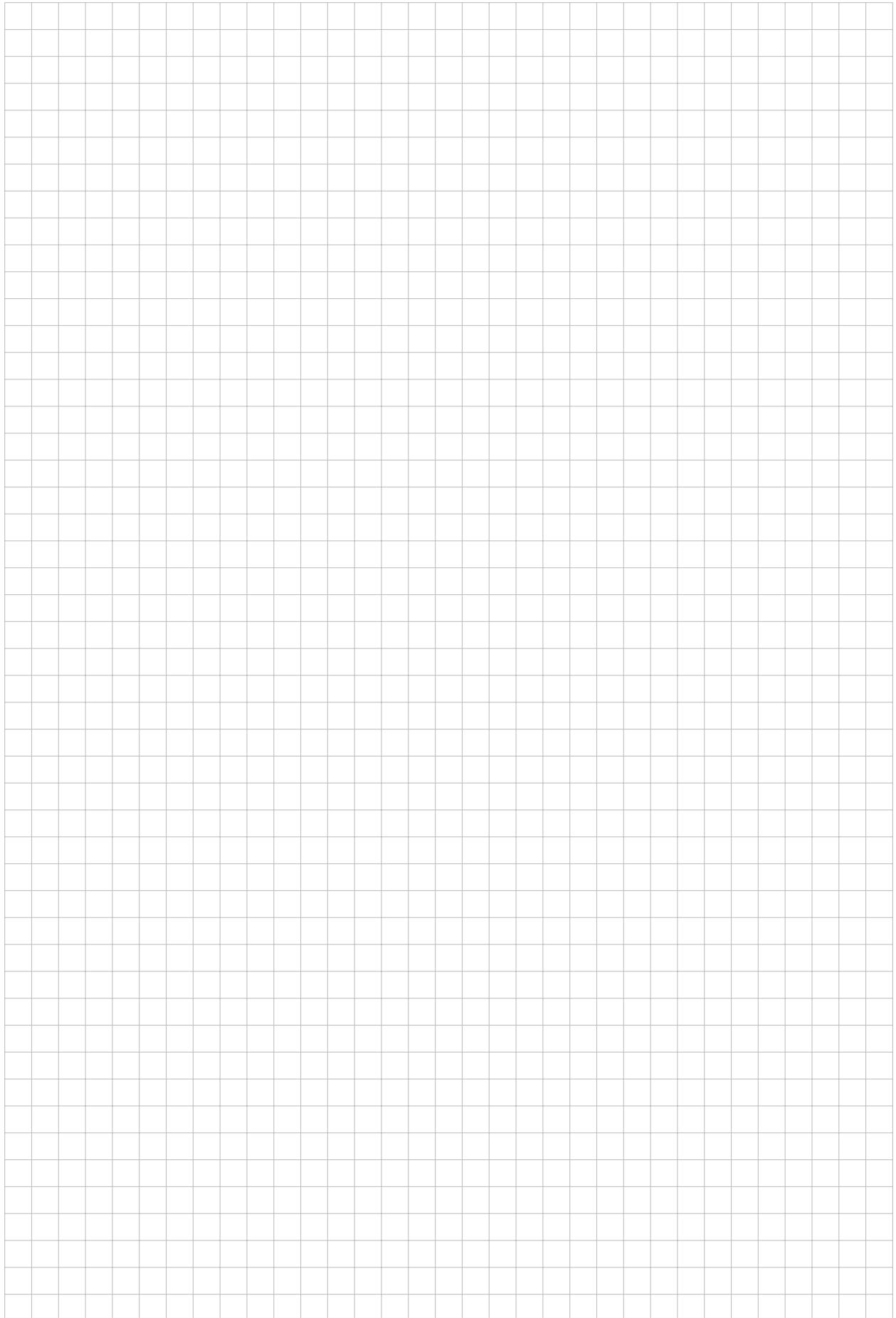
- (a) Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée

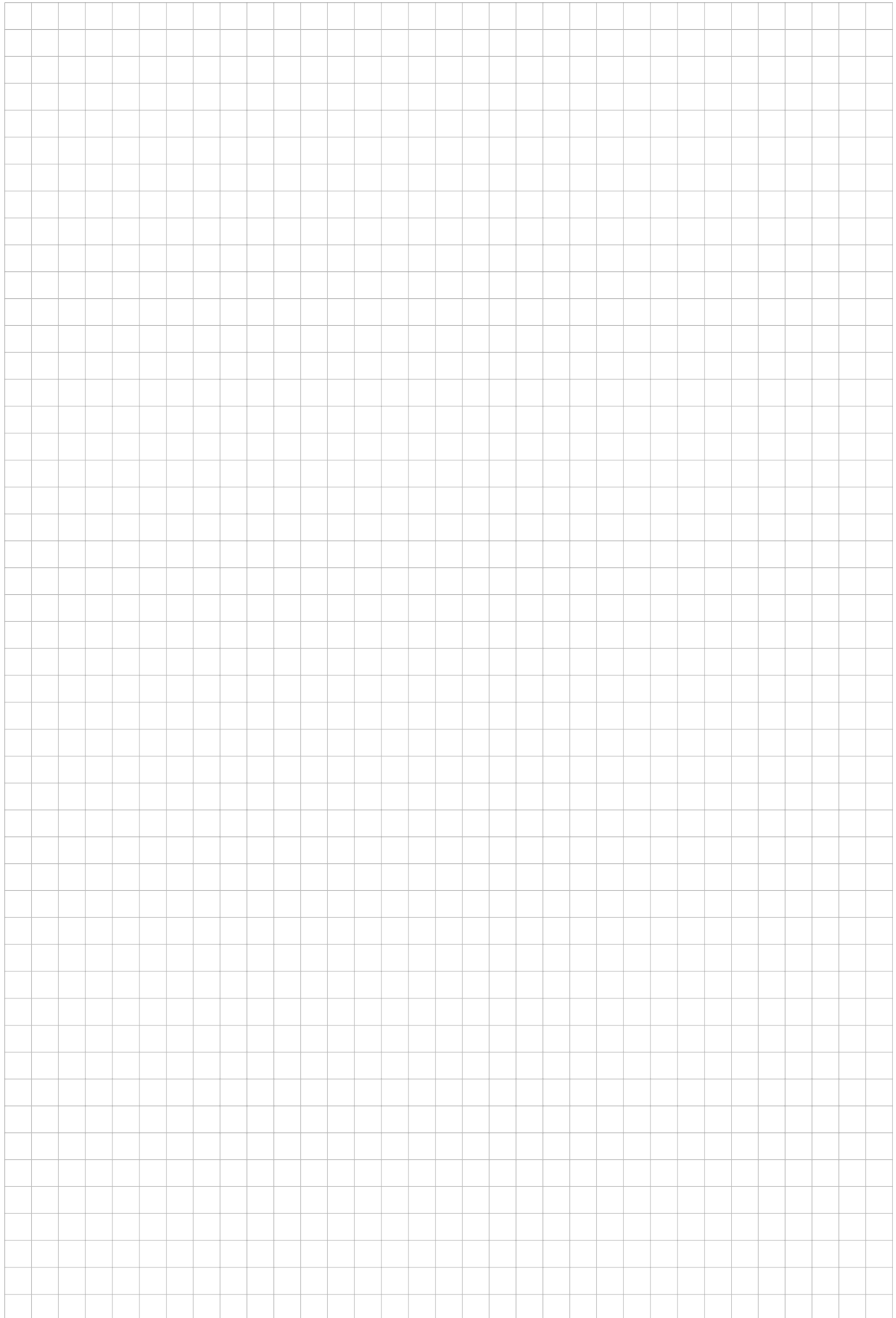
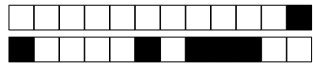
$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) \, dx \quad (1)$$

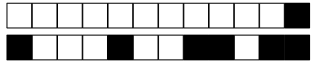
est-elle convergente? Justifier votre réponse.

- (b) Lorsqu'elle est convergente, déterminer en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ la valeur de l'intégrale généralisée (1).





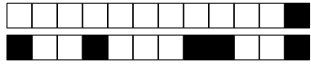




+1/34/27+



+1/35/26+



+1/36/25+