

Nombres réels $\mathbb{R}$

Il est malheureusement impossible de donner une définition précise des nombres réels dans le cadre de ce cours. Vous êtes déjà familiers et familières avec ces nombres, que vous utilisiez depuis le collège pour résoudre des équations, des problèmes géométriques, etc.

Dans ce cours d'analyse, nous aurons besoin de propriétés fines des nombres réels. Nous allons déjà en introduire certaines aujourd'hui.

Point de vue géométrique

Il est naturel d'identifier $\mathbb{R}$ avec la droite



orientée et munie d'un point O (origine) choisi arbitrairement mais une fois pour toutes.

Alors chaque nombre $x \in \mathbb{R}$ caractérise la position d'un unique point sur la droite : x est la distance du point à O , comptée positivement si le point est à droite de O , négativement s'il se

traverse à gauche de 0. Ainsi, x est interprété comme la coordonnée du point correspondant sur la droite.

On fait alors l'identification

$$x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow \text{point correspondant.}$$

C-à-d, on ne distingue plus les deux objets et l'on se référera soit au point soit au nombre, selon le contexte.

Notion de distance

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Avec l'identification ci-dessus, on peut parler de la distance de x à y ,

définie par $d(x, y) := |x - y|$. On a ainsi une interprétation géométrique de la valeur absolue :

$$|x| = d(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \text{ (coordonnée positive)} \\ -x & \text{si } x \leq 0 \text{ (coordonnée négative)} \end{cases}$$

Point de vue algébrique

Les définitions de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont "naturelles" et il est relativement facile d'appréhender la structure de ces ensembles. Au premier abord, $\mathbb{Q}$ semble beaucoup plus riche que $\mathbb{Z}$; on a l'impression que les points de $\mathbb{Q}$ "recouvrent" toute la droite réelle.

Pourtant, comme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$: les nombres rationnels sont dénombrables.

En revanche, les nombres réels ne sont pas dénombrables ; on dit que " $\mathbb{R}$ a la puissance du continu" (cf. Algèbre linéaire pour plus de détails).

Comme on a déjà vu, il existe en effet des nombres irrationnels (p. ex. $\sqrt{2}$) et il s'avère que l'ensemble

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.

En ce sens précis, les nombres irrationnels (dit grossièrement, les "trous" de la droite réelle, entre les rationnels) sont beaucoup plus nombreux que les rationnels.

La construction rigoureuse des nombres réels se fait en partant de $\mathbb{Q}$: on prouve l'existence d'un corps ordonné archimédien, noté $\mathbb{R}$, qui contient $\mathbb{Q}$ comme sous-corps (cf. Algèbre linéaire pour ces notions). Cette démonstration est faite p.ex. dans les livres de W. Rudin et R. Godement, donnés en référence à la fin du polycopié.

Notion de supremum

Déf: • Soit $E \subset \mathbb{R}$. On dit que $b \in \mathbb{R}$ est un majorant de E si on a

$$\forall x \in E, \quad x \leq b.$$

On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un minorant de E si

$$\forall x \in E, \quad a \leq x.$$

- On dit que E est borné supérieurement (resp. borné inférieurement) si E admet un majorant (resp. un minorant).

Déf: Soit $E \subset \mathbb{R}$ ($E \neq \emptyset$) borné supérieurement. On appelle borne supérieure de E , noté $\sup E$ le plus petit majorant de E .

Ce nombre réel — s'il existe ! — est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \text{ t.q. } \sup E - \varepsilon \leq x \leq \sup E.$$

On fait une définition analogue de $\inf E$.

Rem: Si $E = \emptyset$, alors tout nombre $a \in \mathbb{R}$ est à la fois minorant et majorant de E .

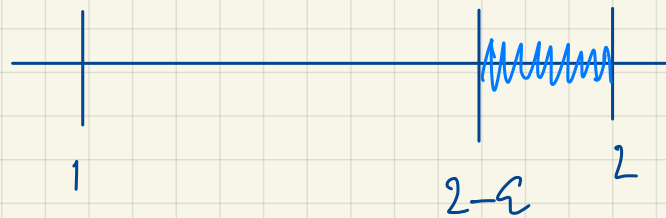
Par souci de cohérence, on adopte la convention

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Exemple : Prouvons que $\sup [1, 2) = 2$.

Il faut montrer : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in [1, 2)$ h.q. $2 - \varepsilon \leq x \leq 2$
i.e. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in [1, 2) \cap [2 - \varepsilon, 2]$

Graphiquement :



On voit que le point milieu de l'intervalle $[2 - \varepsilon, 2]$,

$x_\varepsilon = 2 - \frac{\varepsilon}{2}$ satisfait ces conditions

(si $\varepsilon > 2$, $2 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$ et on prendra simplement $x_\varepsilon = 1$) $\#$

Remarque : Le même argument montre que
 $\sup [1, 2] = 2$.

Axiome de la borne supérieure

Nous énonçons ici comme axiome le résultat suivant, qui est un théorème dans le cadre de la construction des réels à partir des rationnels.

Axiome : Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ et borné
supérieurement. Alors le nombre $\sup E$
existe.

Remarque: On verra un exercice que $\sup E$ est unique.

Une conséquence importante de cet axiome est la suivante.

Proposition (propriété d'Archimède)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$nx > y.$$

Preuve: Supposons par l'absurde que y est un majorant de l'ensemble

$$A := \{nx ; n \in \mathbb{N}\}.$$

Ainsi, A est borné supérieurement et notre axiome donne l'existence de $\alpha := \sup A$.

Comme $x > 0$, on a alors que $\alpha - x$ n'est pas un majorant de A . Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $mx > \alpha - x$. (Ceci implique

$$(m+1)x > \alpha,$$

ce qui contredit $\alpha = \sup A$, car $(m+1)x \in A$.

Cette contradiction montre que l'hypothèse

$$nx \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ est absurde. } \#$$

Polycopié, p. 5: L'écriture la plus générale pour
intersection / réunion d'une collection $\Lambda \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$
de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ est :

$$\bigcap_{E \in \Lambda} E := \{x \in \mathbb{R} ; \forall E \in \Lambda, x \in E\}$$

$$\bigcup_{E \in \Lambda} E := \{x \in \mathbb{R} ; \exists E \in \Lambda, x \in E\}$$

Nous donnons deux exemples où Λ est une collection
infinie de sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

$$1) \quad \Lambda = \left\{ \left[0, \frac{1}{n} \right) ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Dans ce cas, Λ possède une infinité dénombrable d'éléments et l'on peut utiliser l'indice $n \in \mathbb{N}^*$ pour écrire l'intersection :

$$\bigcap_{E \in \Lambda} E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n} \right) = \left[0, 1 \right) \cap \left[0, \frac{1}{2} \right) \cap \left[0, \frac{1}{3} \right) \cap \dots$$

Nous prouvons maintenant que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$.

• $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n} \right)$ est trivial car $0 \in \left[0, \frac{1}{n} \right) \forall n \geq 1$,
donc $x \in \{0\} \Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n} \right)$.

• $\{0\} \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n})$: Il faut montrer que

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}) \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Or, } x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}) \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1.$$

La première inégalité nous dit que $x = 0$ ou $x > 0$.

Supposons par l'absurde que $x > 0$. Alors Archimède

avec $y = 1$ donne : $\exists n_0 \geq 1$ t.q. $n_0 x > 1$.

Ainsi $\frac{1}{n_0} < x$, ce qui contredit $x < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$ 
 #

$$2) \quad \Lambda = \{ (1, 1+t) ; t \in (0,1) \}$$

Ici Λ contient une infinité non-dénombrable d'éléments, indexés par la variable continue $t \in (0,1)$.

Prouvons que

$$\bigcup_{E \in \Lambda} E = \bigcup_{t \in (0,1)} (1, 1+t) = (1,2) .$$

• $\bigcup_{t \in (0,1)} (1, 1+t) \subset (1,2) :$ On a que

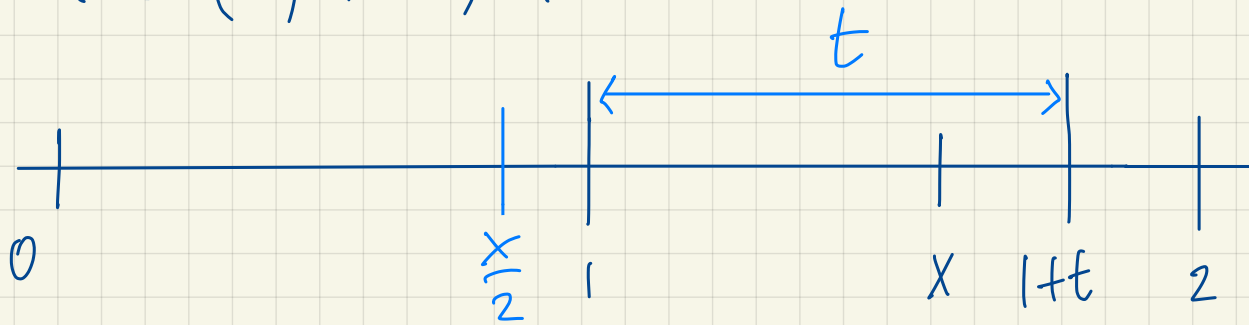
$$x \in \bigcup_{t \in (0,1)} (1, 1+t) \iff \exists t \in (0,1) \text{ h.-q. } x \in (1, 1+t)$$

Or, si $t \in (0,1)$ alors $(1, 1+t) \subset (1,2)$, d'où $x \in (1,2)$.

- $\bigcup_{t \in (0,1)} (1, 1+t) \supset (1, 2)$: Pour $x \in (1, 2)$ donné,

on voit bien graphiquement qu'il existe $t \in (0, 1)$

t.q. $x \in (1, 1+t)$:



On peut donner un tel t explicitement en prenant par exemple $1+t$ le point milieu de l'intervalle $(x, 2)$:

$$1+t = \frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{2}$$