

CORRIGÉ 8

1. (a) f est continue en $x = 0$ et a une discontinuité de seconde espèce en tout autre point $x \in \mathbb{R}$.
- (b) f est continue partout sauf en $x = 0$. En $x = 0$, f est continue à droite mais $f(0^-) = -2 \neq 2 = f(0)$, donc f a une discontinuité simple en 0.
- (c) f est continue en tout point $x \neq 0$ comme composée de fonctions continues. En $x = 0$, f est continue à droite mais $f(0^-) = -\infty$, donc f a une discontinuité de seconde espèce en 0.
- (d) f est continue en tout point $x \neq 0$ comme composée de fonctions continues. En $x = 0$, f a une discontinuité de seconde espèce car $f(0^-)$ et $f(0^+)$ n'existent pas.

2. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite de périodes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ de f , telles que $T_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par la continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Puisque $T_n \rightarrow 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n_0} < \delta$. On remarque alors que deux multiples successifs de T_{n_0} satisfont

$$(k+1)T_{n_0} - kT_{n_0} = T_{n_0} < \delta, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Donc on peut trouver $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $k_0 T_{n_0} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Par conséquent,

$$|f(x_0) - f(0)| = |f(x_0) - f(k_0 T_{n_0})| < \varepsilon.$$

Comme $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ sont arbitraires, on en conclut que f est constante.

3. $\chi_{\mathbb{Q}}$ est r -périodique pour tout $r \in \mathbb{Q}$. En effet, si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x + r \in \mathbb{Q}$, d'où $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $x + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d'où $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'a clairement pas de période fondamentale.

4. Par hypothèse, $A := \sup\{f(y) ; a < y < x\} \leq f(x)$. Nous allons montrer que $A = f(x^-)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de A , il existe $\delta > 0$ tel que $A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq A$. Puisque f est croissante, on en déduit que

$$t \in (x - \delta, x) \implies f(t) - A \geq f(x - \delta) - A > -\varepsilon \implies |f(t) - A| < \varepsilon,$$

d'où $A = f(x^-)$. Le fait que $f(x^+) = \inf_{x < t < b} f(t)$ se montre de façon similaire. Maintenant, si $a < x < y < b$, on a

$$f(x^+) = \inf_{x < t < b} f(t) \leq \inf_{x < t < y} f(t) \quad \text{et} \quad f(y^-) = \sup_{a < t < y} f(t) \geq \sup_{x < t < y} f(t) \implies f(x^+) \leq f(y^-).$$

(Noter qu'en fait, comme f est croissante, $\inf_{x < t < b} f(t) = \inf_{x < t < y} f(t)$ et $\sup_{a < t < y} f(t) = \sup_{x < t < y} f(t)$.)

Si g est décroissante, on démontre que

$$\inf_{a < t < x} g(t) = g(x^-) \geq g(x) \geq g(x^+) = \sup_{x < t < b} g(t) \quad \text{et} \quad g(x^+) \geq g(y^-), \quad a < x < y < b,$$

en appliquant les résultats démontrés ci-dessus à $f := -g$ (qui est croissante). $\square$

5. Supposons s.p.d.g. que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante. Pour chaque $x \in D$, on peut choisir un rationnel $r(x) \in (f(x^-), f(x^+))$. D'autre part, $x < y$ entraîne $f(x^+) \leq f(y^-)$, d'où $r(x) < r(y)$. Il existe donc une application injective $r : D \rightarrow \mathbb{Q}$, ce qui montre que D est dénombrable. $\square$

6. Si f est prolongeable par continuité en b , son prolongement est continu sur $[a, b]$, donc uniformément continu sur $[a, b]$ par le théorème de la continuité uniforme. Ainsi, f est la restriction d'une fonction uniformément continue, et est donc elle-même uniformément continue.

Réciproquement, supposons que $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue et considérons une suite $(b_n) \subset [a, b)$ telle que $b_n \rightarrow b$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors la suite $(f(b_n)) \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy, et donc convergente. En effet, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$x, y \in [a, b), |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Comme $b_n \rightarrow b$, il existe alors $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|b_n - b_m| < \delta(\varepsilon)$ pour tout $n, m \geq N$. On a ainsi que $|f(b_n) - f(b_m)| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ existe, pour toute suite $(b_n) \subset [a, b)$ qui converge vers b . Il découle alors du corollaire 4.2.6 du polycopié (version du 07.11.2023) que $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe.

7. Supposons que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $M > 0$ tel que

$$x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

On écrit maintenant $[0, \infty) = [0, M+1] \cup [M, \infty)$. Comme f est continue sur $[0, M+1]$, elle est uniformément continue sur cet intervalle. Donc il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$x, y \in [0, M+1], |x - y| < \delta_0 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Posons alors $\delta := \min\{\delta_0, 1\}$, et considérons $x, y \in [0, \infty)$ tels que $|x - y| < \delta$. Alors $x, y \in [0, M+1]$ ou $x, y \in [M, \infty)$. Si $x, y \in [0, M+1]$, on a bien $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ par (2). Si $x, y \in [M, \infty)$, on a que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

par (1), ce qui termine la preuve. $\square$

8. (a) Par une variante évidente de l'exercice 6, si $f(x) = 1/x$ était uniformément continue sur $(0, \infty)$, elle pourrait être prolongée par continuité en $x = 0$, ce qui est absurde. Sur $[a, \infty)$, la continuité uniforme de f est assurée par l'exercice 7. (Cf. polycopié, fin du chapitre 4, pour des arguments "à la main" montrant ces deux résultats.)

(b) Posons $x_n = \sqrt{\pi/2 + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{-\pi/2 + 2n\pi}$. On vérifie facilement que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ et $f(x_n) - f(y_n) = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc f n'est pas uniformément continue par la proposition vue au cours.

9. (a) Il découle de l'exercice 6 que f n'est pas uniformément continue. On peut aussi procéder comme en 8 (b) en utilisant $x_n = 1/n$ et $y_n = 1/n^2$. On obtient que $|x_n - y_n| < 1/n \rightarrow 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| = \ln(n) \rightarrow \infty$.

(b) Montrons que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in [0, \infty)$. On travaille par équivalences en supposant, s.p.d.g., que $x > y$:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff \ln(x) - \ln(y) < \varepsilon \iff \ln\left(\frac{x}{y}\right) < \varepsilon \iff \frac{x}{y} < e^\varepsilon \iff x - y < y(e^\varepsilon - 1).$$

On remarque alors que $y(e^\varepsilon - 1) \geq e^\varepsilon - 1$ pour tout $y \geq 1$. On peut donc prendre $\delta = e^\varepsilon - 1$ et on a bien, en remontant la chaîne d'équivalences, $x - y < e^\varepsilon - 1 \leq y(e^\varepsilon - 1) \implies \dots \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(c) On constate que f est continue et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, donc f est uniformément continue par l'exercice 7.

(d) f se comporte comme x^2 au voisinage de ∞ , donc on "devine" que f n'est pas uniformément continue, et on tente d'utiliser les mêmes suites qu'au cours, dans la preuve que x^2 n'est pas uniformément continue sur $(0, \infty)$: $x_n = n$, $y_n = n + 1/2n \implies |x_n - y_n| < 1/n$ mais

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= \left| \frac{x_n^3}{x_n + 1} - \frac{y_n^3}{y_n + 1} \right| = \left| x_n^2 - x_n + 1 - \frac{1}{x_n + 1} - \left(y_n^2 - y_n + 1 - \frac{1}{y_n + 1} \right) \right| = \\ &= \left| x_n^2 - y_n^2 + y_n - x_n + \frac{1}{y_n + 1} - \frac{1}{x_n + 1} \right| = \left| -1 - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1/2n}{(n+1+1/2n)(n+1)} \right| = \\ &= \left| 1 + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{(n+1+1/2n)(n+1)} \right) \right| \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Donc f n'est pas uniformément continue.

(e) f est uniformément continue car elle est continue sur $(0, 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = 1$ car $t \mapsto e^t$ est continue et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ (ce qui se déduit, par exemple, de l'exercice 3 (a) de la série 4).

(f) Soit T la période de f . Par le théorème de la continuité uniforme, f est uniformément continue sur $[0, 2T]$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, T)$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $|x - y| < \delta$, $x, y \in [0, 2T]$. Montrons maintenant que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta < T$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + kT$ et $y + kT$ appartiennent à $[0, 2T]$. Mais alors $|f(x) - f(y)| = |f(x + kT) - f(y + kT)| < \varepsilon$.