Corrigé 6

1. (a) $\dfrac{1}{n-1} \geq \dfrac{1}{n}$ $\forall n \geq 2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} = \infty \implies \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1} = \infty$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-7n+13} = 1$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty \implies \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-7n+13} < \infty$. (Notez que $n^2-7n+13 > 0$ $\forall n \geq 1$.)

(c) Posons $a_n = a^{\sum_{k=1}^n 1/k}$ et $b_n = a^{\ln(n)}$. Par l'exercice 5 (a) de la série 5, et la continuité de $t \mapsto a^t$, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n)} = a^\ell > 0.$$

Donc $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont même nature. Comme

$$b_n = a^{\ln(n)} = n^{\ln(a)} = \frac{1}{n^{-\ln(a)}} = \frac{1}{n^{\ln(1/a)}},$$

on a que $\sum b_n$ converge ssi $\ln(1/a) > 1$, i.e. ssi $a < 1/e$. En conclusion, $\sum a^{\sum_{k=1}^n 1/k}$ converge ssi $a < 1/e$.

(d) Si $\alpha \leq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln(1+1/n^\alpha) \neq 0$ et donc la série diverge.

Pour $\alpha > 0$, on remarque que, par la continuité de la fonction $t \mapsto \ln(t)$,

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha} = \ln(e) = 1,$$

ce qui montre que $\sum \ln(1+1/n^\alpha)$ et $\sum 1/n^\alpha$ ont même nature. Donc $\sum \ln(1+1/n^\alpha)$ converge ssi $\alpha > 1$.

2. (a) Posant $x_n = a^n n!/n^n$, on a que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!}\right| = |a| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |a| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{|a|}{e}.$$

Donc $\sum x_n$ converge absolument si $|a| < e$ et diverge si $|a| > e$. Si $|a| = e$, on a pour tout $n \geq 2$ que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1 \implies |x_{n+1}| > |x_n| > \cdots > |x_1| = e.$$

Ainsi la suite $(|x_n|)$ est strictement positive et croissante. Donc $x_n \not\to 0$ et la série $\sum x_n$ est divergente. En résumé, $\sum a^n n!/n^n$ converge ssi $|a| < e$.

On montre que les séries (b) et (e) sont convergentes par le critère du quotient.

(c) Si $p = 1$, la série converge ssi $|a| < 1$. Supposons maintenant $p \geqslant 2$. Posant $x_n = a^{n^p}$, on a que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} |a|^{n^{p-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1, \\ \infty & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$

Si $|a| = 1$, $a = \pm 1$, et $x_n = (\pm 1)^{n^p} \not\to 0$, donc la série diverge. En résumé, $\sum a^{n^p}$ converge ssi $|a| < 1$.

On montre également par le critère de la racine que (f) converge ssi $|a| < 1$.

(d) Posant $x_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$, on a que

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{n^{\ln(n)/n}}{\ln(n)} = \frac{e^{(\ln(n))^2/n}}{\ln(n)}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/2}}\right)^2 = 0$, par la généralisation de l'exercice 3 (a), série 4, dont le résultat reste vrai pour tout $p \in (0,\infty)$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 0$ et la série est convergente.

3. (a) Après condensation avec $a_n = 2^n$, on est ramené à l'étude de la série de terme général $x_n = 2^n/[\ln(n\ln 2)]^{n\ln 2}$ et le critère de la racine montre que la série converge.

(b) Après condensation avec $a_n = 2^n$, on est ramené à l'étude de la série de terme général $x_n = 2^n/(n\ln 2)^{\alpha n \ln 2}$. On a alors que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n\ln 2)^{\alpha \ln 2}} = \frac{2}{(\ln 2)^{\alpha\ln 2}} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\alpha\ln 2}} = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha < 0, \\ 2 & \text{si } \alpha = 0, \\ 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Donc la série converge ssi $\alpha > 0$.

(c) Après condensation avec $a_n = 2^n$, on est ramené à l'étude de la série de terme général $x_n = 2^{n(1-\alpha)}/(n\ln 2)^\beta$, et l'on obtient que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 2^{1-\alpha}$. Ainsi, pour tout $\beta \geq 0$, la série converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha < 1$. Pour $\alpha = 1$, on a $x_n = 1/(n\ln 2)^\beta$, donc la série converge si $\beta > 1$, diverge sinon.

4. On utilise le critère de Raabe–Duhamel dans tout l'exercice. Pour les points (a) et (b), on obtient respectivement $\alpha = 3/2$ et $\alpha = -1/2$, donc la série (a) converge et la série (b) diverge. Pour (c), on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^k \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\sum_{k=0}^{p-1} 1^k = \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Donc la série converge si $p > 2$ et diverge si $p < 2$. Pour $p = 2$, on peut utiliser une comparaison avec la série de terme général $y_n = 1/n$, qui est divergente. On a que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(2n+2)^2} > 0 \implies \frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{y_{n+1}}{y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et l'on conclut par le second critère de comparaison que la série est divergente.

6. L'hypothèse implique $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut, comme ci-dessus, par comparaison avec la série de terme général $y_n = 1/n$.

7. Pour cet exercice, il est utile de faire une étude de fonction élémentaire par les méthodes usuelles, et d'esquisser le graphe de f dans chaque cas. On obtient alors les résultats suivants :

(a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\inf f = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\sup f = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, pas de min/max ;

(b) $D(f) = \mathbb{R}^*$, $\inf f = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\sup f = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, pas de min/max ;

(c) $D(f) = \mathbb{R}$, $\inf f = 1$, $\sup f = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $x = 0$ est un point de minimum global, avec $f_{\min} = f(0) = 1 = \inf f$ (dans ce cas, l'infimum de f *est atteint* au point $x = 0$, c'est un minimum) ;

(d) $D(f) = \mathbb{R}$, $\inf f = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\sup f = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $x = 1 - \sqrt{3}/3$ point de max local, $x = 1 + \sqrt{3}/3$ point de min local ;

(e) $D(f) = (-1, \infty)$, $\inf f = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, $\sup f = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, pas de min/max ;

(f) $D(f) = \mathbb{R}$, $\inf f = 0$, $\sup f = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $x = 0$ est un point de minimum global, avec $f_{\min} = f(0) = 0 = \inf f$ (l'infimum est atteint) ;

(g) $D(f) = \mathbb{R}$, $\inf f = -1$, $\sup f = 1$, $x = 2k$ point de max global, $x = 2k+1$ point de min global, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ($\inf f$ et $\sup f$ sont atteints en une infinité de points où $f(x) = f_{\min} = -1$, resp. $f(x) = f_{\max} = 1$) ;

(h) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$, $\inf f = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\sup f = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $x = \pi/2 + 2k\pi$ point de min local, $x = -\pi/2 + 2k\pi$ point de max local, $\forall k \in \mathbb{Z}$.