

CORRIGÉ 4B

1. Voir <https://www.youtube.com/watch?v=qicnruhAuIA>

2. (i) On a $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = 1$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = -1$.

(ii) On a $x_n = \sin((n+8)\frac{\pi}{4}) \cos((n+8)\frac{\pi}{4})$, donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max\{x_0, \dots, x_7\} = \frac{1}{2}$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min\{x_0, \dots, x_7\} = -\frac{1}{2}$.

(iii) Les points d'accumulations sont $\text{acc}(x_n) = \{0, 1\}$. Donc on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(a) Si (x_n) est bornée, $\text{acc}(x_n) \neq \emptyset$ par Bolzano–Weierstrass. Donc $\liminf x_n$ et $\limsup x_n$ sont finies et $\liminf x_n = \inf(\text{acc}(x_n)) \leq \sup(\text{acc}(x_n)) = \limsup x_n$.

(b) Si (x_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors toute sous-suite de (x_n) converge vers l . Donc $\text{acc}(x_n) = \{l\}$ et $\liminf x_n = \limsup x_n = l$.

Réciproquement, supposons $\liminf x_n = \limsup x_n = l \in \mathbb{R}$. Alors $\text{acc}(x_n) = \{l\}$. De plus, (x_n) est bornée. En effet, supposons par l'absurde que (x_n) n'est pas bornée supérieurement (l'autre cas se traitant de façon analogue). Alors il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Mais ceci contredit $\limsup x_n \in \mathbb{R}$. Donc (x_n) est bornée. Montrons finalement que $x_n \rightarrow l$. Supposons par l'absurde qu'il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \not\rightarrow l$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Par Bolzano–Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_{k_j}})$ de (x_{n_k}) qui converge. Notons $l' = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}}$. On a alors $l' \in \text{acc}(x_n)$, donc $l' = l$, ce qui contredit l'hypothèse que $x_{n_k} \not\rightarrow l$. Ainsi, on a bien $\lim x_n = l$.

(c) On fait la preuve pour des suites bornées. Les autres cas se discutent de manière analogue. On montre que $\liminf x_n \leq \liminf y_n$. L'inégalité des $\limsup$ se prouve de façon similaire.

Supposons par l'absurde que $\liminf y_n < \liminf x_n$. Alors, par définition de $\liminf y_n$, il existe $y \in \text{acc}(y_n)$ tel que $y < \liminf x_n$. Soit (y_{n_k}) une sous-suite qui converge vers y . Considérons la sous-suite (x_{n_k}) correspondante. Par Bolzano–Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{n_{k_j}})$. Notons $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}}$. Comme $x \in \text{acc}(x_n)$, on a $x \geq \liminf x_n > y$. Or, par hypothèse,

$$x_{n_{k_j}} \leq y_{n_{k_j}}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \implies x \leq y,$$

ce qui est absurde.

3. (a) On sait du cours que $x_n \leq s_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par l'exercice 1, on a alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = \ell.$$

(b)-(c) Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On commence par prouver que $s_N \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le binôme de Newton, on a $(1 + \frac{1}{n})^{n+N} = \sum_{k=0}^{n+N} \binom{n+N}{k} \frac{1}{n^k}$. Pour prouver le résultat, il suffit donc de prouver que

$$s_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^N \binom{n+N}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Par récurrence, on prouve que

$$\frac{1}{k!} \leq \binom{n+N}{k} \frac{1}{n^k}, \quad \forall k = 0, \dots, N.$$

L'initialisation est triviale. Supposons l'hypothèse vraie pour un $k \in \{0, \dots, N\}$. On obtient alors

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \binom{n+N}{k+1} \frac{1}{n^{k+1}} = \binom{n+N}{k+1} \frac{1}{n^{k+1} + (N-k)n^k} \leq \binom{n+N}{k+1} \frac{1}{n^{k+1}}.$$

Ceci prouve que $s_N \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$s_N \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N = e = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Laissant $N \rightarrow \infty$, ceci implique $\ell \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. Par le point (a), on a donc bien

$$\ell \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \ell \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell.$$

4. (a) Par l'exercice 2, on a $0 < e - s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, en utilisant la formule donnant la somme d'une série géométrique,

$$\begin{aligned} e - s_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{l=2}^k (n+l)} \right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

(b) Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Par le point (a), on a

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} < 1.$$

Par notre hypothèse, $q!e$ est entier. Comme

$$q!s_q = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} \right)$$

est aussi entier, on conclut que $q!(e - s_q)$ est entier, ce qui est absurde.