

CORRIGÉ 2

1. Par hypothèse, $b - a > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $n(b - a) > 1$, i.e. $nb - na > 1$. Donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $na < p < nb$. On peut alors prendre $c = p/n$.

2. Tout d'abord, A est non vide (car $0 \in A$) et borné supérieurement, donc s est fini. En effet, supposons par l'absurde que A n'est pas borné supérieurement. Alors pour tout $M > 0$ il existe $x_M \in A$ tel que $x_M > M$, donc $x_M^2 > M^2$. On aboutit à une contradiction en choisissant par exemple $M > 2$.

Montrons maintenant que $s^2 = 2$.

Supposons par l'absurde que $s^2 < 2$. Nous allons construire un nombre x tel que $x^2 \leq 2$ mais $x > s$, ce qui contredit la définition de s . Soit $\varepsilon \in (0, 1]$. On cherche x sous la forme $x_\varepsilon = s + \varepsilon > s$. Comme $\varepsilon \leq 1$, on a

$$x_\varepsilon^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \leq s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon.$$

On déduit que $x_\varepsilon^2 \leq 2$ si $\varepsilon \leq \frac{2-s^2}{2s+1}$. Par l'hypothèse $s^2 < 2$, on a bien $\frac{2-s^2}{2s+1} > 0$. On peut donc choisir $\varepsilon \in (0, 1]$ tel que $\varepsilon \leq \frac{2-s^2}{2s+1}$, et le x_ε correspondant donne la contradiction désirée.

Supposons maintenant que $s^2 > 2$. Nous allons construire un nombre x tel que $x < s$ mais $x^2 > 2$, ce qui contredit à nouveau la définition de s . On écrit cette fois, $x_\varepsilon = s - \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$. On a

$$x_\varepsilon^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon.$$

Donc $x_\varepsilon^2 > 2$ si $\varepsilon < \frac{s^2-2}{2s}$. Par l'hypothèse $s^2 > 2$, on a bien $\frac{s^2-2}{2s} > 0$. On peut donc choisir $\varepsilon \in (0, \frac{s^2-2}{2s})$ et le x_ε correspondant donne la contradiction désirée.

Nous avons donc montré que $s^2 < 2$ et $s^2 > 2$ sont impossibles, d'où le résultat. $\square$

3. (a) A est clairement minoré par 0 et majoré par 1, donc A est borné. De plus, $0 = \inf A$ car pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $0 \leq x \leq \varepsilon$. De même, $1 = \sup A$ car pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $1 - \varepsilon \leq x \leq 1$.

(b) Mêmes conclusions qu'au point (a). Mais dans ce cas $\inf A, \sup A \notin A$.

(c) Clairement, A n'est pas borné inférieurement, donc A n'est pas borné. Mais A est majoré par $\sqrt{2}$, et $\sqrt{2} = \sup A$. En effet, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (ex. 1), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $\sqrt{2} - \varepsilon \leq x \leq \sqrt{2}$.

(d) A est minoré par 0 et majoré par 1, donc A est borné. On a que $1 = \sup A \in A$. En outre, $0 = \inf A \notin A$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ Archimède donne un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\varepsilon > 1$, d'où $0 < 1/n < \varepsilon$.

4. (a) Supposons par l'absurde qu'il existe deux majorants s, s' de A qui satisfont la propriété

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \quad \text{t.q.} \quad s - \varepsilon \leq x \leq s,$$

mais que $s \neq s'$. On peut également supposer s.p.d.g. que $s' < s$. On choisit alors $\varepsilon \in (0, s - s')$, de sorte que $s' < s - \varepsilon$. Ainsi, puisque s' est un majorant de A , on a $x \leq s' < s - \varepsilon$ pour tout $x \in A$ (un dessin peut aider). Donc $A \cap [s - \varepsilon, s] = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $s = \sup A$. Un argument similaire montre l'unicité de $\inf A$.

(b) (i) Tout d'abord, il est clair que, si A est minoré alors $-A$ est majoré (symétrie par rapport à l'origine). Par définition de l'inf,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \quad \text{t.q.} \quad \inf A \leq x \leq \inf A + \varepsilon.$$

Posant $y = -x \in (-A)$ et multipliant la paire d'inégalités par -1 , ceci équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in (-A) \quad \text{t.q.} \quad -\inf A - \varepsilon \leq y \leq -\inf A.$$

Il découle alors de l'unicité prouvée sous (a) que $\sup(-A) = -\inf A$. La preuve que $\inf(-A) = -\sup A$ est analogue.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_A \in A$ et $x_B \in B$ tels que $\sup A - \varepsilon/2 \leq x_A \leq \sup A$ et $\sup B - \varepsilon/2 \leq x_B \leq \sup B$. Donc $x = x_A + x_B$ satisfait $\sup A + \sup B - \varepsilon \leq x \leq \sup A + \sup B$. Invoquant à nouveau l'unicité du sup, on obtient $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Le fait que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ se démontre de façon similaire.

(c) Il suffit de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-|x| \leq x \leq |x|$. Notant $B = \{|x|; x \in A\}$, on obtient alors que $-\sup B \leq x \leq \sup B$, pour tout $x \in A$.

5. (a) (i) L'intersection $\cap_n A_n$ est bornée. (ii) En général $\cup_n A_n$ n'est pas borné. Pour (i), il suffit de remarquer que $\cap_n A_n \subset A_{17}$, qui est borné. Pour (ii), considérer les intervalles $A_n = [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si A est fini, supposons qu'il contient k éléments $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Alors $\inf A = a_1$ et $\sup A = a_k$, donc A est bien borné inférieurement et supérieurement.

6. (a) (i) Alors est f est injective, ce qui se montre par contraposition. Soit $y \in B$. Si $f(x) = f(x') = y$, alors $x = x'$ car l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution.

(ii) Dans ce cas f est surjective. Pour tout $y \in A$, il existe (au moins) un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

(iii) Alors f est bijective.

(b) Nous savons de la théorie des équations du deuxième degré (Viète) que la droite $x = x_{\min} := -b/2a$ est un axe de symétrie du graphe de f (parabole), et que la fonction atteint son minimum/maximum en ce point si $a > 0/a < 0$. Par conséquent, f n'est pas surjective : si $a > 0$, on a que $(-\infty, c - b^2/4a) \cap \text{Im}(f) = \emptyset$; si $a < 0$, on a que $(c - b^2/4a, +\infty) \cap \text{Im}(f) = \emptyset$. D'autre part, la symétrie du graphe montre que f n'est pas injective; par exemple, on vérifie aisément que $f(-b/2a - 1) = f(-b/2a + 1)$.

(c) Pour montrer que f est injective, on procède par contraposition : on suppose que $f(a) = f(b)$ et l'on montre que $a = b$. En effet,

$$a^3 + a = b^3 + b \iff (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \implies a = b \text{ ou } a^2 + ab + b^2 + 1 = 0.$$

Nous aurons terminé si la seconde relation est impossible pour $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $a^2 + ab + b^2 + 1 = 0$. On a alors

$$ab = (a + b)^2 + 1 > 0 \implies a^2 + ab + b^2 + 1 > 0,$$

contradiction $\nmid$

D'autre part, f est aussi surjective. En effet, l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ admet pour tous $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $27q^2 + 4p^3 \geq 0$ la solution (réelle)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Autre approche : constater que le graphe de f intersecte l'axe Ox : en effet, la fonction f est continue et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, ce qui montre qu'elle prend toutes les valeurs réelles. Mais cet argument fait appel à la théorie des fonctions continues (théorème de la valeur intermédiaire), qui fait l'objet d'un prochain chapitre...