

CORRIGÉ 1

1. (a) (i) La proposition à démontrer est $P(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation: $n = 1 : \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et l'on en déduit $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. En effet,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{\text{hyp.réc.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \checkmark$$

Nous avons montré que $P(1)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, le résultat est donc démontré. $\square$

(ii) La proposition à démontrer est $P(n) : (\sum_{k=1}^n k)^2 = \sum_{k=1}^n k^3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation: $n = 1 : (\sum_{k=1}^1 k)^2 = 1 = \sum_{k=1}^1 k^3 \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose $(\sum_{k=1}^n k)^2 = \sum_{k=1}^n k^3$. On a alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n k\right)(n+1) + (n+1)^2$$

$$\stackrel{\text{hyp.réc.}}{=} \sum_{k=1}^n k^3 + 2\left(\sum_{k=1}^n k\right)(n+1) + (n+1)^2 \stackrel{(i)}{=} \sum_{k=1}^n k^3 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 \checkmark$$

Nous avons montré que $P(1)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, le résultat est donc démontré. $\square$

(b) La proposition à démontrer est $P(n) : n! \geq 2n - 1$, $n \geq 3$.

Initialisation: $3! = 6 \geq 2 \cdot 3 - 1 = 5 \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose $n! \geq 2n - 1$ et l'on montre $(n+1)! \geq 2(n+1) - 1$. En effet,

$$(n+1)! = (n+1)n! \stackrel{\text{hyp.réc.}}{\geq} (n+1)(2n-1) = 2n^2 + n - 1 > 2(n+1) - 1 \quad \forall n \geq 3.$$

Pour démontrer cette dernière inégalité, il suffit de constater qu'elle équivaut à $2n^2 - n - 2 > 0$. Or l'unique racine positive du polynôme $2x^2 - x - 2$ est $x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) \approx 1.28 < 3$, donc l'inégalité est vraie pour tout $n \geq 3$.

Nous avons ainsi montré que $P(3)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 3$. Le résultat est donc démontré. $\square$

(c) Je préfère écrire la formule à démontrer sous la forme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

qui est équivalente à celle énoncée par symétrie des coefficients binômiaux (triangle de Pascal).

Initialisation: $(x+y)^1 = x+y$ et $\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x+y \checkmark$

Pas de récurrence: on suppose $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ et l'on montre $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$.

On écrit

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{n+1} &= x(x+y)^n + y(x+y)^n = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
 &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \binom{n}{1} x^n y + \binom{n}{2} x^{n-1} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n} x y^n \\
 &\quad + \binom{n}{0} x^n y + \binom{n}{1} x^{n-1} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n-1} x y^n + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
 &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \quad \checkmark \quad \square
 \end{aligned}$$

2. (a) Si $x, y \leq 0$, alors $xy \geq 0$ et donc $|xy| = xy$. D'autre part, $|x||y| = (-x)(-y) = xy$.
Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$ et donc $|xy| = -xy$. D'autre part, $|x||y| = (-x)y = -xy$.

Les autres cas sont similaires.

(b) Par définition, pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique solution s positive de l'équation $s^2 = a$. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, posons $a = x^2 \geq 0$. La solution positive de $s^2 = x^2$ est $s = -x$ si $x \leq 0$ et $s = x$ si $x \geq 0$. Donc on a bien $\sqrt{x^2} = |x|$.

(c) Par (b), $|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$. D'autre part, $|x| = \sqrt{x^2}$ et $|y| = \sqrt{y^2}$. Nous aurons donc prouvé le résultat si nous montrons que

$$\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}.$$

Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, nous avons les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &\iff x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2\sqrt{x^2}\sqrt{y^2} + y^2 \\
 &\iff xy \leq \sqrt{x^2 y^2} \iff xy \leq \sqrt{(xy)^2} \iff xy \leq |xy|.
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie, le résultat est démontré.

(d) Similaire à (c).

3. (a) Le domaine de définition de l'équation est $D = (-\infty, 2]$.

Méthode 1. Pour résoudre on élève au carré:

$$\sqrt{2-x} = x \implies 2-x = x^2 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff (x+2)(x-1) = 0 \iff x \in \{-2; 1\} \subset D.$$

On vérifie ensuite la présence d'éventuelles "solutions parasite": $x = 1$ est bien solution mais $x = -2$ donne $2 = -2 \nmid$ On retient donc l'unique solution $x = 1$.

Méthode 2. C'est la méthode la plus propre, on travaille par équivalences. En plus du domaine de définition D , il faut prendre en compte la condition de positivité due à la racine carrée: $x \geq 0$. On a alors:

$$\sqrt{2-x} = x, x \in [0, 2] \iff x^2 + x - 2 = 0, x \in [0, 2] \iff x = 1.$$

(b) La conclusion d'un tel raisonnement est que $S \subset A$; cf. (a) Méthode 1 avec $A = \{-2; 1\}$ et $S = \{1\}$. Si l'on travaille par équivalences, on obtient $A = S$; cf. (a) Méthode 2.

4. (a) Sur le domaine de définition $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < x-1 \iff \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} < x-1 \\ \text{et} \\ \frac{x-1}{x+1} > -(x-1). \end{cases}$$

D'une part,

$$\frac{x-1}{x+1} < x-1 \iff \frac{x-1}{x+1} - (x-1) < 0 \iff \frac{x(x-1)}{x+1} > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty).$$

D'autre part,

$$\frac{x-1}{x+1} > -(x-1) \iff \frac{x-1}{x+1} + (x-1) > 0 \iff \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} > 0 \iff x \in (-2, -1) \cup (1, +\infty).$$

En prenant l'intersection, on obtient donc l'ensemble solution $S = (1, +\infty)$.

(b) Sur le domaine de définition $D = \mathbb{R}$, on a

$$|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1 \iff \begin{cases} x^2 + 3x - 1 \geq x^2 + x + 1 \\ \text{ou} \\ x^2 + 3x - 1 \leq -(x^2 + x + 1). \end{cases}$$

Premièrement,

$$x^2 + 3x - 1 \geq x^2 + x + 1 \iff x - 1 \geq 0 \iff x \in [1, +\infty).$$

Deuxièmement,

$$x^2 + 3x - 1 \leq -(x^2 + x + 1) \iff x(x+2) \leq 0 \iff x \in [-2, 0].$$

En prenant la réunion, on obtient donc l'ensemble solution $S = [-2, 0] \cup [1, +\infty)$.

5. Les carrés de nombres entiers peuvent être répartis en deux sous-ensembles disjoints:

$$\{n^2; n \in \mathbb{N}\} = \{n^2; n \text{ pair}\} \cup \{n^2; n \text{ impair}\}.$$

Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, et donc $n^2 = 4k^2$ est aussi pair. Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$, et donc $n^2 = 4k^2 + 2k + 1$ est aussi impair. Ainsi, n^2 est pair/impair ssi n est pair/impair.

Supposons par l'absurde qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, tels que $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et $(p/q)^2 = 3$, i.e.

$$p^2 = 3q^2.$$

On commence par montrer que, sous nos hypothèses, ni q ni p ne peut être pair. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2k$. Alors l'équation donne

$$p^2 = 3q^2 = 12k^2 \implies p^2 \text{ pair} \implies p \text{ pair}.$$

Ainsi, p et q sont pairs, ce qui contredit l'hypothèse $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Supposons maintenant que $p = 2l$ pour un $l \in \mathbb{N}$. L'équation donne

$$4l^2 = 3q^2.$$

On suppose alors par l'absurde que $q = 2n + 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Il vient

$$4l^2 = 3(4n^2 + 4n + 1) \implies 4l^2 - 12n^2 - 12n = 3,$$

ce qui est absurde car le membre de gauche de cette égalité est pair alors que le membre de droite est impair. Ainsi, q doit aussi être pair, ce qui contredit à nouveau l'hypothèse $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

On conclut donc que, pour satisfaire nos hypothèses et l'équation ci-dessus, p et q doivent tout deux être impairs: il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $p = 2m+1$ et $q = 2n+1$. L'équation donne alors $2m^2 + 2m - 6n^2 - 6n = 1$, ce qui est absurde car le membre de gauche est pair alors que le membre de droite est impair. $\nmid \square$

Remarque: En utilisant la décomposition en facteurs premiers des entiers, on montre que n est divisible par 3 ssi n^2 est divisible par 3. Utilisant ce résultat, une preuve plus directe peut être donnée, en suivant exactement les étapes de la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.