

1. (a) $\int \frac{2x+5}{4x^2-12x+9} dx = \int \frac{2x+5}{(2x-3)^2} dx = \int \left(\frac{1}{2x-3} + \frac{8}{(2x-3)^2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| - \frac{4}{2x-3} + C;$
- (b) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2+x)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + C;$
- (c) $\int \frac{x^6+1}{(x^2+1)^2} dx = \int \left(x^2 - 2 + \frac{3}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 3\arctan x + C.$

2. (a) Pour tout $x \in (2, \infty)$, $t = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \iff x = \varphi(t) := 1 + \frac{t^2}{t^2-1}$. Alors $\varphi'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$ et l'intégrale auxiliaire est

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\left(\frac{t^2}{t^2-1} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)\left(\frac{t^2}{t^2-1} - 1\right)}} \cdot \left(\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\right) dt = -2 \int \frac{t dt}{\left(\frac{1}{t^2-1} + \sqrt{\frac{t^2}{(t^2-1)^2}}\right)(t^2-1)^2} \\ &= -2 \int \frac{t dt}{t^3 + t^2 - t - 1} = -2 \int \frac{t dt}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{1}{t+1} + C. \end{aligned}$$

En substituant $t = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, on trouve alors, après quelques calculs,

$$\int \frac{dx}{(x-2) + \sqrt{x^2-3x+2}} = \frac{1}{2} \ln\left(2x-3 + 2\sqrt{x^2-3x+2}\right) + \sqrt{x^2-3x+2} - (x-2) + C, \quad \forall x \in (2, \infty).$$

- (b) Pour tout $x \in (0, 2)$, $t = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \iff x = \varphi(t) := \frac{2t^2}{t^2+1}$. Alors $\varphi'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$ et l'intégrale auxiliaire est

$$\int \frac{1}{\left(\frac{2t^2}{t^2+1} + 2\right)\sqrt{\frac{4t^2}{t^2+1} - \frac{4t^4}{(t^2+1)^2}}} \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt = \dots = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2} dt}{(\sqrt{2}t)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) + C.$$

Donc $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\sqrt{\frac{2x}{2-x}}\right) + C, \quad \forall x \in (0, 2).$

3. Le changement de variable $t = a+b-x$, $dt = -dx$, donne $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_b^a f(t)(-dt) = \int_a^b f(t) dt$.

(a) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x) \sin(\pi-x)}{1 + \cos^2(\pi-x)} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$
 $\implies \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \stackrel{t=\cos x}{=} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \arctan(t) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4};$

(b) $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right) dx$
 $= \int_0^{\pi/4} \ln 2 dx - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx \implies \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \ln 2 dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

4. (a) Pour $x \in (0, a)$, on pose $x = \varphi(t) := a \sin t$, avec $t \in (0, \pi/2)$. On a bien que $\varphi : (0, \pi/2) \rightarrow (0, a)$ est un difféomorphisme et $\varphi \in C^1([0, \pi/2])$. Donc le TCV donne

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt \\ &\stackrel{\cos t > 0}{=} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^2 \pi}{4}. \end{aligned}$$

(b) Pour $x \in (0, a)$, on pose $x = a \sinh t$, $dx = a \cosh t dt$, $t \in (0, \operatorname{argsh}(1))$, et le TCV donne

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \frac{a^2 \sinh^2 t}{\sqrt{a^2 + a^2 \sinh^2 t}} a \cosh t dt = a^2 \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \sinh^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} (\cosh 2t - 1) dt = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh 2t - t \right]_0^{\operatorname{argsh}(1)} = \frac{a^2}{2} \left[\sinh t \cosh t - t \right]_0^{\operatorname{argsh}(1)} = \frac{a^2}{2} \left[\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

(c) $11/3 - \ln 16$ (cf. exercice 4 (b), série 13); (d) $2\pi\sqrt{3}/3$ (cf. exercice 5, série 13).

$$5. (a) L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt.$$

Mais $\cos(\pi - t) = \cos(\pi + t)$ pour tout $t \in (0, 2\pi)$, donc l'intégrande est symétrique par rapport à $x = \pi$.

$$\text{Donc } L = 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos t} dt = 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2(t/2)} dt = 4 \int_0^\pi \sin(t/2) dt = -8[\cos(t/2)]_0^\pi = 8.$$

$$\begin{aligned} (b) A &= \int y(t) \dot{x}(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) (1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \left[t - 2 \sin t + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. (a) A &= 2\pi \int_0^1 y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \cosh(x) \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x) dx \\ &= \pi \int_0^1 (1 + \cosh(2x)) dx = \pi \left[x + \frac{1}{2} \sinh(2x) \right]_0^1 = \pi \left[1 + \frac{1}{2} \sinh(2) \right]. \end{aligned}$$

$$(b) V = \pi \int_0^1 y^2(x) dx = \pi \int_0^1 \cosh^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \sinh(2) \right].$$

$$7. (a) \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda x} dx = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^t = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$(b) \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx \stackrel{\text{i.p.p.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t + 1}{t} = 1.$$

$$(c) \int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(\ln x - 1) \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-1 - t(\ln t - 1)) = -1.$$

$$\begin{aligned} (d) \int_{-2}^4 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}} dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow -2^+ \\ b \rightarrow 4^-}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{9 - (x-1)^2}} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -2^+ \\ b \rightarrow 4^-}} \arcsin \left(\frac{x-1}{3} \right) \Big|_a^b \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi. \end{aligned}$$

8. (a) On compare l'intégrande $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ avec $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Comme $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in (1, \infty)$, l'exercice 7 (b) implique que l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$ converge.

(b) L'intégrande $f(x) = \frac{x}{x^2 + \cos^2 x}$ étant continu à droite en $x = 0$, la convergence de l'intégrale dépend du comportement de f à l'infini : $f(x) = \frac{1}{x + (\cos^2 x)/x} \sim \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow \infty$). On entend par là que

$$f(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ lorsque } x \rightarrow \infty, \text{ ce que l'on vérifie rigoureusement en comparant } f(x) \text{ avec } g(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\text{On a que } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + \cos^2 x} = 1 \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{x}{x^2 + \cos^2 x} dx = \infty \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + \cos^2 x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{x^2 + \cos^2 x} dx}_{\text{intégrale définie}} + \int_1^\infty \frac{x}{x^2 + \cos^2 x} dx = \infty.$$

(c) L'intégrande $f(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln^2 x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}}$ étant continu à droite en $x = 2$, la convergence de l'intégrale

dépend du comportement de f à l'infini : $f(x) = \frac{1 - 1/\ln x}{(\ln x + 1/\ln x)\sqrt{x^2 - x + 1}} \sim \frac{1}{(\ln x)x} \quad (x \rightarrow \infty).$

On compare donc $f(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x (\ln x - 1)}{(\ln^2 x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - 1}{(\ln x + 1/\ln x)\sqrt{1 - 1/x + 1/x^2}} = 1$$

$$\text{et } \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^t = \infty \Rightarrow \int_2^\infty \frac{\ln x - 1}{(\ln^2 x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \infty.$$

(d) Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} = 1$, l'exercice 7 (a) implique que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \sin(e^{-x}) dx$ converge.

(e) L'intégrande $f(x) = \pi/2 - \arctan(x^2)$ étant continu à droite en $x = 0$, il suffit d'étudier le comportement asymptotique de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow \infty$. C'est la vitesse à laquelle $\pi/2 - \arctan(x^2) \rightarrow 0$ qui est déterminante. On observe que, pour tout $x > 0$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\right) = \cotan(\arctan(x^2)) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Donc $f(x) = \arctan(1/x^2) \sim 1/x^2$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Or $1/x^2$ est intégrable à l'infini ($\int_1^\infty dx/x^2 = 1$), donc l'intégrale $\int_0^\infty (\pi/2 - \arctan(x^2)) dx$ converge.

(f) L'intégrande $\ln(\sin x)$ est continue sur $(0, \pi/2]$, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x) = -\infty$. La vitesse de cette divergence déterminera la convergence ou non de l'intégrale. Or,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x / \sin x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1,$$

donc l'exercice 7 (c) implique que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ converge.

(g) On remarque tout d'abord que, si elle existe, $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$. Observant alors que

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ quand } x \rightarrow 0^+, \text{ et que } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty, \text{ on conclut que } \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} < \infty.$$

(h) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$. La première intégrale converge car

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x - 1}}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x\sqrt{x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x - 1}} dx < \infty.$$

La seconde est également convergente car

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = 1 \quad \text{et} \quad \int_2^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty.$$

Donc $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$ converge.