CORRIGÉ 13

1. Comme f est continue sur $[a, b)$, une primitive sur cet intervalle est donnée par $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette fonction est donc une primitive de f sur (a, b), tout comme F. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$, pour tout $x \in (a, b)$. Ainsi $\lim_{x\to a^+} F(x)$ existe et vaut C. La fonction $\widetilde{F} : [a, b) \to \mathbb{R},\ \widetilde{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$, a donc les propriétés requises.

2. $f(x) = \ln(x)/(x + 1)$ étant continue sur $(0, \infty)$, elle admet une primitive F sur cet intervalle, d'où

$$g(t) = F(t) - F(1/t) \implies g'(t) = F'(t) + F'(1/t)/t^2 = f(t) + f(1/t)/t^2 = \frac{(t-1)\ln t}{t^2 + t}, \quad \forall t > 0.$$

3. (a) $\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x - 1)e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}\,;$

(b) $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - \int 2xe^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2(x - 1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}\,;$

(c) $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C,\ \forall x > 0$ (i.p.p. en posant $u = \ln x,\ v' = 1$) ;

(d) $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)^2 + x + C,\ \forall x > 0$ (en intégrant deux fois par parties) ;

(e) $\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = x^\alpha x(\ln x - 1) - \int \alpha x^{\alpha-1}x(\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = x^{\alpha+1}(\ln x - 1) - \alpha\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x + \alpha\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow (1+\alpha)\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = x^{\alpha+1}(\ln x - 1) + \frac{\alpha}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \Rightarrow \int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x - 1) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1} + C,\ \forall x > 0\,;$

(f) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int \frac{1}{2}x^2 2\ln x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - (\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2) + C = \frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C,\ \forall x > 0$ (en utilisant (e) avec $\alpha = 1$) ;

(g) $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

$\implies \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + C,\ \forall x \in \mathbb{R}\,;$

(i) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}\,;$

(k) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,\mathrm{d}x = x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int x \cdot \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\,\mathrm{d}x$

$= x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C,\ \forall x \in \mathbb{R}\,;$

(m) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C,\ \forall x \in [-1, 1]\,;$

(n) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1 - x^2}\arcsin x + \int\,\mathrm{d}x = x - \sqrt{1 - x^2}\arcsin x + C,\ \forall x \in [-1, 1].$

4. (a) On fait le changement de variable $x = \varphi(t) := t^2$. On a que $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ est un difféomorphisme avec $\varphi'(t) = 2t > 0$ pour tout $t > 0$. L'intégrale auxiliaire est donc $\int 2t\cos t\,\mathrm{d}t = 2(t\sin t + \cos t) + C$ (exercice 3 (i)), d'où $\int \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}) + C$, pour $x \in (0, \infty)$. Comme $\cos(\sqrt{x})$ est continue sur $[0, \infty)$, l'exercice 1 $\implies \int \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}) + C$, pour tout $x \in [0, \infty)$.

(b) On fait ici le changement de variable $t^2 = x + 1,\ x = \varphi(t) := t^2 - 1$. On a que $\varphi : (0, \infty) \to (-1, \infty)$ est un difféomorphisme avec $\varphi'(t) = 2t > 0$ pour tout $t > 0$. L'intégrale auxiliaire est donc

$$\int \frac{t^2 + 1}{t + 1} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^3 + t}{t + 1}\,\mathrm{d}t = 2\int \Big(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t + 1}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 2\ln(t + 1)\Big) + C,$$

d'où

$$\int \frac{x + 2}{\sqrt{x + 1} + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} - (x + 1) + 4(x + 1)^{1/2} - 4\ln((x + 1)^{1/2} + 1) + C, \quad \forall x \in (-1, \infty).$$

Le résultat de l'exercice 1 montre à nouveau que cette primitive s'étend à $[-1, \infty)$.

(c) On fait le changement de variable $t^2 = x - 1,\ x = \varphi(t) := t^2 - 1$. On a que φ est un difféomorphisme de $(0, 1)$ sur $(1, 2)$, et de $(1, \infty)$ sur $(2, \infty)$, $\varphi'(t) = 2t > 0$ pour tout $t > 0$. L'intégrale auxiliaire est

$$\int \frac{2t^3}{t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t = 2\int \Big(t + 2 + \frac{3t - 2}{t^2 - 2t + 1}\Big)\,\mathrm{d}t = t^2 + 4t + 2\int \frac{3t - 2}{(t - 1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= t^2 + 4t + 2\int \Big(\frac{3}{t - 1} + \frac{1}{(t - 1)^2}\Big)\,\mathrm{d}t = t^2 + 4t + 6\ln|t - 1| - \frac{2}{t - 1} + C.$$

En remarquant que l'intégrande est continu en $x=1$ et en utilisant encore l'exercice 1, il vient :

$$\int \frac{x-1}{x-2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x-1+4\sqrt{x-1}+6\ln|\sqrt{x-1}-1|-\frac{2}{\sqrt{x-1}-1}+C_1, & x\in[1,2),\\ x-1+4\sqrt{x-1}+6\ln|\sqrt{x-1}-1|-\frac{2}{\sqrt{x-1}-1}+C_2, & x\in(2,\infty),\end{cases}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont deux constantes qui peuvent être différentes.

5. On fait le changement de variable $t=\tan(x/2)$, $x=\varphi(t):=2\arctan t$. On a que $\varphi:\mathbb{R}\to(-\pi,\pi)$ est un difféomorphisme, avec $\varphi'(t)=2/(1+t^2)>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Comme $\cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$, on a l'intégrale auxiliaire

$$\int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}t}{3}\right)+C.$$

Ainsi, $$\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C, \quad \forall x\in(-\pi,\pi).$$

On remarque que $1/(2+\cos x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Nous allons donc étendre la primitive obtenue à $\mathbb{R}$. Nous faisons le changement de variable $t=\psi(x):=\tan(x/2)$ sur chaque intervalle $I_k:=((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\psi_k:=\psi\big|_{I_k}$ est un difféomorphisme de I_k dans $\mathbb{R}$, d'inverse $x=\psi_k^{-1}(t)=2\arctan t+2k\pi$.

On a alors $$\int\frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C_k, \quad \forall x\in I_k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer les constantes C_k pour assurer la continuité de la primitive au bornes des intervalles I_k. L'égalité des limites en $(2k+1)\pi^-$ et $(2k+1)\pi^+$ donne $C_{k+1}=C_k+2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$, d'où $C_k=C_0+2k\frac{\sqrt{3}}{3}\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. On obtient ainsi la famille de primitives sur tout $\mathbb{R}$, paramétrée par la constante $C_0\in\mathbb{R}$:

$$\int\frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan(\frac{x}{2}))+C_0+2k\frac{\sqrt{3}}{3}\pi, & x\in I_k,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}(2k+1)\pi+C_0, & x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

6. (a) (i) $\displaystyle\int\frac{1}{t^2+k^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}\int\frac{1}{(t/k)^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)+C$;

(ii) $\displaystyle\int\frac{1}{t^2-k^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}\int\frac{1}{(t/k)^2-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2k^2}\int\left(\frac{1}{(t/k)-1}-\frac{1}{(t/k)+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C.$

(b) On a $\displaystyle\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\frac{1}{(x+b/2a)^2-(b^2-4ac)/4a^2}\,\mathrm{d}x.$

— Si $b^2-4ac<0$, on pose $k^2=-(b^2-4ac)/4a^2$ et $t=x+b/2a$. On a alors la primitive auxiliaire $\frac{1}{a}\int\frac{1}{t^2+k^2}\,\mathrm{d}t$ et on conclut en invoquant (a) (i).

— Si $b^2-4ac=0$, le résultat est immédiat.

— Si $b^2-4ac>0$, on pose $k^2=(b^2-4ac)/4a^2$ et $t=x+b/2a$. On a alors la primitive auxiliaire $\frac{1}{a}\int\frac{1}{t^2-k^2}\,\mathrm{d}t$ et on conclut en invoquant (a) (ii).

(c) Dans la pratique, on n'emploie pas les formules ci-dessus, mais la démarche y conduisant. Par exemple :

(i) $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x+4\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-5}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+\frac{2}{\sqrt{6}}\int\left(\frac{1}{x-(1+\sqrt{6})}-\frac{1}{x-(1-\sqrt{6})}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+\frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$;

(ii) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\ln|x^2+x+1|-2\cdot\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]^2+1}$

$\displaystyle=\ln|x^2+x+1|-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C$ (en utilisant le changement de variable $t=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$).

7. (a) Tout d'abord, par l'exercice précédent,

$$I_1(t) = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C.$$

Pour calculer I_2, on écrit

$$I_2(t) = \frac{1}{a^4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(\frac{t^2}{a^2}+1)^2}$$

et on fait le changement de variable

$$z = \frac{t}{a}, \quad t = az, \quad \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}z.$$

En intégrant par parties $\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \frac{1}{a^3}\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{a^3}\int\frac{z^2+1-z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{a^3}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{a^3}\int\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{a^3}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{a^3}\left[-\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right] \\
&= \frac{1}{2a^3}\int\frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2a^3}\frac{z}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{2a^3}\int\frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{a} + \frac{1}{2a^3}\frac{\frac{t}{a}}{(\frac{t}{a})^2+1} \\
&= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}I_1(t) + \frac{t}{2(t^2+a^2)}\right].
\end{aligned}$$

(b) En suivant la même démarche on trouve, pour tout $n \geqslant 2$,

$$I_n(t) = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}(t) + \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right].$$