

choisir un nombre fini de points $x_1, \dots, x_m$ dans K , K étant compact, un

$$K \subset B(x_1, \alpha) \cup \dots \cup B(x_m, \alpha).$$

La suite $(f_{n_i}(x))$ convergeant pour tout $x \in E$, il existe un entier N tel que

$$|f_{n_i}(x_s) - f_{n_j}(x_s)| < \varepsilon \quad (46)$$

si $i \geq N, j \geq N$ et $1 \leq s \leq m$.

Si $x \in K$, (45) montre que $x \in B(x_s, \alpha)$ pour un indice s tel que

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_s)| < \varepsilon$$

pour tout i . Si $i \geq N$ et $j \geq N$, on déduit de (46) que

$$\begin{aligned} |f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| &\leq |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_s)| + |f_{n_i}(x_s) - f_{n_j}(x_s)| \\ &\quad + |f_{n_j}(x_s) - f_{n_j}(x)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

LE THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

7.26 Théorème *Toute fonction complexe et continue sur $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite (P_n) de polynômes. Si la fonction est réelle, les polynômes peuvent être choisis à coefficients réels.*

C'est sous cette forme que le théorème a été initialement découvert par Weierstrass.

Preuve Supposons, sans perdre de généralité, que $[a, b] = [0, 1]$ et de plus que $f(0) = f(1) = 0$. En effet, si le théorème est établi dans ce cas, posons

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \quad (0 \leq x \leq 1).$$

On a alors $g(0) = g(1) = 0$ et si g est limite uniforme de polynômes sur $[0, 1]$, il est évident qu'il en est de même pour f , $f - g$ étant un polynôme.

Prolongeons f à $\mathbb{R}$ tout entier en posant $f(x) = 0$ à l'extérieur de $[0, 1]$. La fonction f est alors uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Posons

$$Q_n(x) = a_n(1 - x^2)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (47)$$

le coefficient a_n étant choisi de telle sorte que

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (48)$$

Afin d'obtenir des informations sur l'ordre de grandeur de a_n , observons que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n dx \\ &\geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2) dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

et on déduit de (48) que

$$a_n < \sqrt{n}. \quad (49)$$

L'inégalité $(1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2$ utilisée ci-dessus peut être facilement établie en considérant la fonction

$$(1 - x^2)^n - 1 + nx^2$$

qui s'annule en 0 et dont la dérivée est positive sur $[0, 1]$.Pour tout $\alpha > 0$, (49) implique

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1 - \alpha^2)^n \quad (\alpha \leq |x| \leq 1), \quad (50)$$

et donc $Q_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-1, -\alpha]$ et $[\alpha, 1]$ ($\alpha \leq |x| \leq 1$).

Posons maintenant

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (51)$$

Les hypothèses faites sur f montrent que

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t) dt = \int_0^1 f(t) Q_n(t-x) dt,$$

la dernière intégrale étant clairement un polynôme de la variable x . On a défini ainsi une suite de polynômes (P_n) , à coefficients réels si f est réelle.Un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, soit $\alpha > 0$ tel que $|y - x| < \alpha$ entraîne

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $M = \sup |f(x)|$. Utilisant (48) et (50) et le fait que $Q_n(x) \geq 0$, on voit que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

(47)

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(x)) Q_n(t) dt \right|$$

(48)

$$\begin{aligned} &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\alpha} Q_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} Q_n(t) dt + 2M \int_{\alpha}^1 Q_n(t) dt \\ &\leq 4M\sqrt{n}(1-\alpha^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pourvu que n soit suffisamment grand. D'où le théorème.

Il est intéressant de tracer les représentations graphiques de Q_n pour quelques valeurs de n ; on pourra ainsi se convaincre de la nécessité de la continuité uniforme de f pour établir la convergence uniforme de la suite (P_n) .

Pour démontrer le théorème 7.32, on n'aura pas besoin de la forme générale du théorème 7.26, mais seulement du résultat plus faible suivant qui en est un corollaire.

(49)

7.27 Corollaire Pour tout segment $[-a, a]$, il existe une suite (P_n) de polynômes réels vérifiant pour tout n , $P_n(0) = 0$ et qui converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-a, a]$.

Preuve D'après le théorème 7.26, il existe une suite de polynômes réels (Q_n) qui converge uniformément sur $[-a, a]$ vers $|x|$. En particulier, $Q_n(0) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Il est facile de voir que les polynômes

(50)

$$P_n(x) = Q_n(x) - Q_n(0), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ont les propriétés désirées.

(51)

Nous allons maintenant mettre en évidence les propriétés des polynômes nécessaires pour établir le théorème de Weierstrass.

7.28 Définition On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ de fonctions complexes définies sur un ensemble E est une *algèbre* si $\mathcal{A}$ est stable pour l'addition, la multiplication et la multiplication scalaire, c'est-à-dire si (i) $f + g \in \mathcal{A}$, (ii) $fg \in \mathcal{A}$ et (iii) $cf \in \mathcal{A}$ pour toute fonction $f, g \in \mathcal{A}$ et tout nombre complexe c . On peut aussi considérer des algèbres de fonctions réelles et bien sûr dans ce cas, (iii) devra être vérifié pour tout nombre réel c . Si toute limite uniforme de fonctions de $\mathcal{A}$ est encore dans $\mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{A}$ est *uniformément fermée* ou *fermée pour la topologie de la convergence uniforme*.

Soit $\bar{\mathcal{A}}$ l'ensemble des fonctions limites uniformes de fonctions de $\mathcal{A}$; on dit alors que $\bar{\mathcal{A}}$ est l'*adhérence uniforme* de $\mathcal{A}$ (voir la définition 7.14), ou bien l'*adhérence* pour la topologie de la convergence uniforme de $\mathcal{A}$.