CORRIGÉ 11

1. (a)–(b) On calcule les quatre premières dérivées de $f(x) = \arcsin(x)$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}; \quad f^{(2)}(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}; \quad f^{(3)}(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}};$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}}; \quad f^{(5)}(x) = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{9/2}}.$$

La formule de Taylor donne alors

$$f(x) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + o(x^5) \quad \text{et} \quad f(x) = \tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2}{\sqrt{3}}\big(x-\tfrac{1}{2}\big) + \tfrac{2}{3\sqrt{3}}\big(x-\tfrac{1}{2}\big)^2 + \tfrac{8}{9\sqrt{3}}\big(x-\tfrac{1}{2}\big)^3 + o\big(\big(x-\tfrac{1}{2}\big)^3\big).$$

(c)–(d) Clairement $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ est son propre D.L. autour de $a = 0$ (avec reste nul). Autour de $a = 1$, on a $f(x) = 1 + 2(x-1) + 5(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$ (avec reste nul).

(e) Comme $1/\sqrt{1-x^2} = \arcsin'(x)$, le D.L. recherché peut se calculer en dérivant terme à terme le D.L. du point (a), d'où $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.

(f) On pose $x = 1 + h$ et on cherche le D.L. de $f(1+h)$ autour de $h = 0$. On utilise pour ceci les D.L. connus $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4 + o(h^4)$ et $1/(1+h) = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)$, d'où

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \big(h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{4}h^4 + o(h^4)\big)\big(1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)\big)^2 \\ &= h - \tfrac{5}{2}h^2 + \tfrac{13}{3}h^3 - \tfrac{77}{12}h^4 + o(h^4) = (x-1) - \tfrac{5}{2}(x-1)^2 + \tfrac{13}{3}(x-1)^3 - \tfrac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4). \end{aligned}$$

(g) On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$, ce qui donne, en utilisant $\tan h = h + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$ et $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$,

$$\begin{aligned} \tan(x) = \tan\Big(\frac{\pi}{4} + h\Big) &= \frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \big(1+\tan h\big)\big(1 + \tan h + \tan^2 h + \tan^3 h + o(\tan^3 h)\big) \\ &= 1 + 2\tan h + 2\tan^2 h + 2\tan^3 h + o(\tan^3 h) = 1 + 2h + 2h^2 + \tfrac{8}{3}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \sqrt{\tan(x)} &= \sqrt{1 + (2h + 2h^2 + \tfrac{8}{3}h^3 + o(h^3))} \\ &= 1 + h + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{5}{6}h^3 + o(h^3) = 1 + (x - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{\pi}{4})^2 + \tfrac{5}{6}(x-\tfrac{\pi}{4})^3 + o((x-\tfrac{\pi}{4})^3). \end{aligned}$$

2. On utilise pour calculer ces limites les D.L. usuels, et ceux obtenus ci-dessus et dans la série précédente :

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) - (1 - x^2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{3}{2}$;

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))}{x^5} = -\frac{1}{120}$;

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{6\arcsin(x) - 6x - x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{6(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)) - 6x - x^3}{x^5} = \frac{9}{20}$;

(d) $$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin(x)) - \sin^2(x)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)) - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))^2}{x^6} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} + o(x^6) - (x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + o(x^6))}{x^6} = \frac{1}{10} - \frac{1}{36} - \frac{1}{60} ; \end{aligned}$$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2}) + x - (1 - \frac{x^2}{2}) - 2x + o(x^2)}{x - (x - \frac{x^2}{2})} = 2.$

3. Le résultat découle immédiatement de l'inégalité

$$\sup_E |(\alpha f_n + \beta g_n) - (\alpha f + \beta g)| \le |\alpha| \sup_E |f_n - f| + |\beta| \sup_E |g_n - g|.$$

4. Supposons que (f_n) est uniformément de Cauchy. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \ge N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in E. \qquad (1)$$

En particulier, pour chaque $x \in E$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, elle est donc convergente. Posons $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in E$. Ceci définit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. En laissant $m \to \infty$ dans (1), on a alors

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall x \in E,$$

ce qui montre que $f_n \xrightarrow{U} f$.

Réciproquement, supposons $f_n \xrightarrow{U} f$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in E.$$

Ainsi,

$$n, m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in E,$$

ce qui montre que (f_n) est uniformément de Cauchy. $\square$

5. Lorsque $n \to \infty$, on a que $f_n(x) \to f(x) := \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 0, \\ x & \text{pour } x \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,\infty), \mathbb{R})$ et f est discontinue en 0, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,\infty)$. Considérons maintenant les fonctions $g_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{|1-x|}{nx+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
On a alors

$$g_n'(x) = -\frac{1+n}{(nx+1)^2} < 0 \quad \forall x \in (0,1) \quad \text{et} \quad g_n'(x) = \frac{1+n}{(nx+1)^2} > 0 \quad \forall x \in (1,\infty).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est positive, décroît de $g_n(0) = 1$ à $g_n(1) = 0$, puis est strictement croissante sur $(1,\infty)$, avec $\lim_{x\to\infty} g_n(x) = 1/n$. Alors $\sup_{(0,\infty)} |f_n - f| = \sup_{(0,\infty)} g_n = 1$ et la convergence n'est pas uniforme sur $(0,\infty)$. En revanche, $\sup_{[1,\infty)} |f_n - f| = \sup_{[1,\infty)} g_n = 1/n$, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[1,\infty)$.

6. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de f_n est donnée par $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx^2}{(nx^2+1)^2}$, $x \in [-1,1]$.

Ainsi, $|f_n|$ atteint son maximum en $x_n = \pm 1/\sqrt{n}$, avec $\max |f_n| = 1/2\sqrt{n} \to 0$, d'où $f_n \xrightarrow{U} 0$ quand $n \to \infty$. D'autre part, (f_n') converge ponctuellement vers la fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ si $x \neq 0$, $g(0) = 1$. Ainsi, $(\lim_{n\to\infty} f_n)' \neq \lim_{n\to\infty} f_n'$. On constate que la fonction limite g n'est pas continue en $x = 0$, et l'on conclut que (f_n') ne converge pas uniformément vers g.

7. On constate tout d'abord que, pour $x \in [0,1)$, $|f_n(x)| \leq nx^n \to 0$ quand $n \to \infty$. Puisque $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers $f \equiv 0$. Par ailleurs, une étude de fonction sommaire montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n atteint son maximum sur $[0,1]$ au point $x_n = \frac{n}{n+1}$.
Ainsi,

$$\max_{[0,1]} |f_n - f| = f\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n\Big(1 - \frac{n}{n+1}\Big) = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \to \frac{1}{e} \quad (n \to \infty),$$

donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

En revanche, pour $c \in (0,1)$ fixé on constate que, pour n assez grand, $x_n > c$, donc le point de maximum de f_n est en dehors de l'intervalle $[0,c]$. Puisque f_n est croissante sur $[0,x_n]$, on conclut que $\max_{[0,c]} |f_n - f| = f_n(c) = nc^n(1-c) \to 0$ quand $n \to \infty$, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,c]$.