CORRIGÉ 10

1. D'après un principe bien connu en analyse, "quand on ne sait pas quoi faire, on prend une dérivée" :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,\ \forall x>0.$$

Donc la fonction continue $\arctan(x)+\arctan(1/x):(0,\infty)\to\mathbb{R}$ est constante, d'où le résultat.

2. (a) Utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$ de la série précédente, on a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{cotan}^2(x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)(\tan x+x)}{x^2\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\frac{\tan x+x}{x}=\frac{2}{3}.$$

(b) Notant que, pour une fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}f(n)=\ell$ si $\lim_{x\to\infty}f(x)=\ell$, le changement de variable $y=1/x$ donne

$$\lim_{n\to\infty}n\Big[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-e\Big]=\lim_{x\to\infty}x\Big[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}-e\Big]=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha}-e\right]$$

$$\overset{\mathrm{BH}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha}-e\right]=\lim_{y\to 0}\left[\left(-\frac{1}{y^2}\right)\ln(1+y)+\left(\frac{1}{y}+\alpha\right)\frac{1}{1+y}\right](1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{1+\alpha y}{y+y^2}-\frac{\ln(1+y)}{y^2}\right](1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha}=\lim_{y\to 0}\left[\frac{y+\alpha y^2-(1+y)\ln(1+y)}{y^2+y^3}\right](1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha}.$$

Or,

$$\lim_{y\to 0}\left[\frac{y+\alpha y^2-(1+y)\ln(1+y)}{y^2+y^3}\right]\overset{\mathrm{BH}}{=}\lim_{y\to 0}\left[\frac{2\alpha y-\ln(1+y)}{2y+3y^2}\right]\overset{\mathrm{BH}}{=}\lim_{y\to 0}\left[\frac{2\alpha-1/(1+y)}{2+6y}\right]=\alpha-\frac{1}{2}$$

et $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}+\alpha}=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}(1+y)^{\alpha}=e$, d'où finalement

$$\lim_{n\to\infty}n\Big[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}-e\Big]=\Big(\alpha-\frac{1}{2}\Big)e.$$

3. (a) On a

$$f'_\alpha(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}\quad\text{et}\quad f''_\alpha(x)=\frac{(2\alpha-1)x+\alpha}{(x^2+x)^2}.$$

Si $\alpha\le\frac{1}{3}$, on a que $f''_\alpha(x)\le\dfrac{1-x}{3(x^2+x)^2}<0$ pour tout $x\in(1,\infty)$, donc f'_α est strictement décroissante sur $(1,\infty)$. Comme $\lim_{x\to\infty}f'_\alpha(x)=0$, on a alors $f'_\alpha>0$ sur $(1,\infty)$, donc f_α est strictement croissante.

Si $\alpha\ge\frac{1}{2}$, on a que $f''_\alpha(x)\ge\dfrac{1}{2(x^2+x)^2}>0$ pour tout $x\in(1,\infty)$, donc f'_α est strictement croissante sur $(1,\infty)$. Comme $\lim_{x\to\infty}f'_\alpha(x)=0$, on a que $f'_\alpha<0$ sur $[1,\infty)$, donc f_α est strictement décroissante.

(b) Puisque la fonction $\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ est strictement croissante, on déduit du point précédent que la fonction $(1,\infty)\ni x\mapsto(1+1/x)^{x+\alpha}$ est strictement croissante si $\alpha\le\frac{1}{3}$ et strictement décroissante si $\alpha\ge\frac{1}{2}$. Par ailleurs, on déduit du point (b) de l'exercice 1 que $\lim_{n\to\infty}e_n(\alpha)=e$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$. Ainsi, $(e_n(\frac{1}{3}))_{n\ge1}$ est strictement croissante et converge vers e, alors que $(e_n(\frac{2}{3}))_{n\ge1}$ est strictement décroissante et converge vers e, d'où les inégalités proposées.

4. (a) Tout d'abord, par la deuxième inégalité démontrée à l'exercice 3 (b) et la monotonie de $\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, on a que

$$y_n=\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1/2}\right)>0\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

On montre maintenant que $\sum_{n\ge1}y_n$ est convergente en la comparant avec $\sum_{n\ge1}1/n^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}n^2y_n=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+y)-1}{y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\left(1+\frac{y}{2}\right)\ln(1+y) - y}{y^3} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{2}\ln(1+y) + \left(1+\frac{y}{2}\right)\frac{1}{1+y} - 1}{3y^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{2(1+y)} + \frac{1}{2(1+y)} + \left(1+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{-1}{(1+y)^2}\right)}{6y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1+y-1-\frac{y}{2}}{6y(1+y)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{12(1+y)^2} = \frac{1}{12},$$

ce qui montre bien que $\sum_{n\geq 1} y_n$ et $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ ont même nature, d'où la convergence de $\sum_{n\geq 1} y_n$.

(b) Puisque $\sum_{n\geq 1} y_n > 0$, on a alors, par la continuité de la fonction exponentielle,

$$\sum_{k=1}^{n-1} y_k = \ln(x_n) - \ln(x_1) = \ln(x_n) + 1 \implies \ell := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k - 1\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k - 1\right) > e^{-1}.$$

5. Puisque $|\sin(1/x^2)| \leq 1$, on a que $x^3\sin(1/x^2) \to 0$, et donc $e^{x^3\sin(1/x^2)} \to 1$, lorsque $x \to 0$, par la continuité de la fonction exponentielle. Ainsi, $\lim_{x\to 0} h(x)$ est bien une forme indéterminée du type “0/0”. Maintenant, posant $f(x) = e^{x^3\sin(1/x^2)} - 1$ et $g(x) = x$, on constate que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left[3x^2\sin(1/x^2) - 2\cos(1/x^2)\right] e^{x^3\sin(1/x^2)}$$

n'existe pas. (Lorsque $x \to 0$, le premier terme tend vers zéro, le second oscille arbitrairement vite.) Comme $e^t = 1 + t + o(t)$ lorsque $t \to 0$, nous avons pourtant

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin(1/x^2) + o(x^3\sin(1/x^2))}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\sin(1/x^2) + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3\sin(1/x^2))}{x^3\sin(1/x^2)} \cdot \frac{x^3\sin(1/x^2)}{x} = 0.$$

6. On utilise les D.L. des fonctions usuelles autour de $x = 0$ et la division euclidienne des polynômes.

(a) $(\cos x)^2 = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))^2 = 1 - x^2 + o(x^3)$; (b) $(\sin x)^3 = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)$;

(c) $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$; (d) $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x + 1} = \dfrac{x - \frac{x^2}{2}}{2 + x + \frac{x^2}{2}} + o(x^2) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$;

(e) $\sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))$
$= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))^3 + \frac{1}{120}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))^5 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$;

(f) $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} =$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - \frac{1}{8}(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))^2 + \frac{3}{48}(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))^3\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3\sqrt{2}} + o(x^3).$

7. Tout d'abord, f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonction C^1, avec $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $\forall x \neq 0$. Par ailleurs, f est continue en $x = 0$, et on a que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{2x} = 0.$$

Ainsi, par l'exercice 8 de la série 9, f est dérivable en $x = 0$, avec $f'(0) = 0$, et on conclut que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Les extrema de f sont à chercher parmi les points critiques, solutions de $f'(x) = 0$. Nous restreignons dès maintenant l'étude de f à la demi-droite positive car f est paire. On montre aisément que $f(x) < 1$ pour tout $x > 0$, donc $x = 0$ est un point de maximum global.

Les autres points critiques sont toutes les solutions non nulles de l'équation $\tan(x) = x$. On peut résoudre cette équation graphiquement et on trouve une suite de zéros $(x_n)_{n\geq 1}$, avec $x_n \in (n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$, et telle que $|x_n - (n+\frac{1}{2})\pi| \to 0$ quand $n \to \infty$. On a donc $\operatorname{sgn} f(x_n) = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$. Puisque les nombres $(x_n)_{n\geq 1}$ sont tous les zéros de f' sur $(0, \infty)$, f' a un signe constant entre deux points successifs de la suite, et l'on conclut que x_n est un point de minimum (respectivement maximum) local si n est impair (resp. pair).

La nature de ces extrema peut également être déterminée par le signe de la dérivée seconde. En effet, f est C^2 sur $(0, \infty)$ avec

$$f''(x) = \frac{2\sin x - 2x\cos x - x^2\sin x}{x^3}, \quad x > 0.$$

On remarque que $f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = -f(x)$. Ainsi $f''(x_n) = (-1)^{n+1}$, ce qui confirme le résultat ci-dessus.