

Série 7.2 – jeudi 31 octobre 2024

Exercice 1. Contrôler la “croissance” à l’infini des fonctions uniformément continues.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu’il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Indications:

- Montrer qu’il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [0, +\infty[$, $|x - y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq 1$.
- Vérifier que $|f(n\delta) - f(0)| \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $|f(x)| \leq 1 + m + |f(0)|$ avec $m = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor$ où $\lfloor y \rfloor$ est la partie entière de $y \in \mathbb{R}$. Conclure.

Exercice 2. Bien cerner la continuité uniforme.

- Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est uniformément continue ssi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe **et est finie**.
- (**À rendre**) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est uniformément continue sur $[a, +\infty[$.

- Donner, en justifiant, un exemple de fonction continue et bornée qui n’est pas uniformément continue.

Exercice 3. Étude de la continuité uniforme et de la lipschitzianité sur un cas concret.

Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne.

Exercice 4 (*). Un autre point de vue sur la continuité uniforme.

Soit $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *presque lipschitzienne* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists L > 0, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| + \varepsilon.$$

Montrer que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue ssi f est presque lipschitzienne.

Exercice 5 (*). Construire des fonctions lipschitziennes particulières.

- Donner (sans justifier) un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne et bijective telle que f^{-1} n’est pas lipschitzienne.
- (**) Montrer que les fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$ sont denses dans l’ensemble des fonctions uniformément continues sur $[0, 1]$, c-à-d. si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $f_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que

$$|f_\varepsilon(x) - g(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Indication. On pourra au choix soit (i) considérer la fonction $f_\varepsilon(x) = \sup_{y \in [0, 1]} (g(y) - L_\varepsilon |x - y|)$ pour un $L_\varepsilon > 0$ bien choisi, ou (ii) construire une approximation affine par morceaux de g .