

Série 5.1 – mardi 8 octobre 2024

Exercice 1. *Objectif: bien comprendre les définitions.*

Soit $(a_n)_{n=0}^\infty$ une suite réelle. Montrer que $\sum_{n=0}^\infty (a_{n+1} - a_n)$ converge ssi la suite $(a_n)_{n=0}^\infty$ converge.

Exercice 2. *Objectif: rédiger proprement un raisonnement simple.*

Soit $(a_n)_{n=0}^\infty$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrer que $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ converge.

Exercice 3. *Objectif: identifier et appliquer des critères de convergence.*

Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2 + 7} - n \right)$ (penser à la quantité conjuguée)
3. $\sum_{n=0}^\infty \frac{n}{4^n + n^2}$
4. $\sum_{n=0}^\infty \cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$ (utiliser $\sin(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}_+$)

Exercice 4. *Objectif: s'exercer à la manipulation de sommes.*

Trouver trois réels α, β , et μ tels que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

En déduire la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3}{n!}.$$

Indication : On pourra utiliser l'identité $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} = e$, que l'on verra plus tard en cours.

Exercice 5 (*). *Objectif: faire preuve d'inventivité et de méthode pour créer des objets.*

1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. Montrer que

$$\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n;$$

2. Construire une famille de suites $(a_{1,n}), (a_{2,n}), (a_{3,n}), \dots$ telle que

$$\limsup_n (a_{1,n} + a_{2,n} + \dots) > \limsup_n a_{1,n} + \limsup_n a_{2,n} + \dots$$

3. Construire deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\liminf_n a_n + \liminf_n b_n < \liminf_n (a_n + b_n) < \liminf_n a_n + \limsup_n b_n < \limsup_n (a_n + b_n) < \limsup_n a_n + \limsup_n b_n$$

Exercice 6 (*). *Objectif: prouver et utiliser un critère puissant de convergence.*

1. Montrer l'énoncé suivant, appelé *critère de condensation de Cauchy*: Soit $(u_n)_{n=0}^\infty$ une suite décroissante positive. Alors $\sum_{k=0}^\infty u_k$ converge ssi $\sum_{k=0}^\infty 2^k u_{2^k}$ converge.
2. En déduire une nouvelle preuve que la *série de Riemann* $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
3. Étudier la convergence de la *série de Bertrand* $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \log(n)^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.