

Série 3.2 – jeudi 26 septembre 2024

Exercice 1. *Objectif: appliquer les critères de convergence des suites.*

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{\log(n!)}{5^n}$ converge et calculer sa limite.
Indication: utiliser la relation $\log(k) \leq k, \forall k \in \mathbb{N}^$.*

Exercice 2. *Objectif: revenir plus en détail sur les coefficients binomiaux (à connaître!)*

Pour $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, on définit le *coefficient binomial* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On rappelle la définition de *factorielle* n : $n! = \prod_{k=1}^n k$ et $0! = 1$.

- Justifier que $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties (=sous-ensembles) à k éléments dans un ensemble à n éléments (pour cela que l'on désigne aussi $\binom{n}{p}$ par l'expression " p parmi n ").
- En déduire, par un raisonnement de dénombrement, la *relation de Pascal*, pour $1 \leq k < n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

- Montrer (par un raisonnement de dénombrement, c'est-à-dire en comptant le nombre de fois où chaque terme apparaît) que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on a la formule du *binôme de Newton*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Remarque : Les questions 2. et 3. sont indépendantes. Il est aussi possible de démontrer ces deux formules par récurrence (même si je trouve la preuve moins éclairante): dans ce cas, on a besoin de 2. pour démontrer 3.

Exercice 3. *Objectif: critère de convergence des suites, et (une) construction du nombre e*

On définit $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge et que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in]2, 3]$. Le nombre $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est important en analyse; c'est le nombre d'Euler e .

Indications:

- En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

- En utilisant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2$, en déduire que la suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ est bornée.
- En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer que la suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ est croissante.

Exercice 4(*). *Objectif: persévérer pour résoudre un exercice plus délicat, raisonner avec les " ϵ ".*

Soit $(x_n)_{n=0}^\infty$ une suite de nombres réels positifs qui est sous-additive, ce qui signifie par définition que:

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$ converge vers $\inf\{x_n/n; n \in \mathbb{N}\}$. Donner cependant un exemple qui montre que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$ n'est pas nécessairement monotone.