Analyse avancée 1
Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

# Série 13.2 – jeudi 12 décembre 2024

**Exercice 1.** *Une autre construction du logarithme et de l'exponentielle à l'aide de l'intégration.*

Soit $L : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Cette fonction est le logarithme népérien, dont la réciproque est l'exponentielle. L'objectif de cet exercice est de construire ces fonctions d'une manière différente de celle vue en cours (il ne faut donc pas utiliser log et exp dans les arguments!).

1. Montrer que $L(1) = 0$, que $L$ est strictement croissante et de classe $C^\infty$.
2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $L(xy) = L(x) + L(y)$
3. Étudier les limites de $L$ en $0^+$ et en $+\infty$.
4. Poser $E$ la fonction réciproque de $L$; donner son domaine de définition $D$, ses limites aux bords du domaine, sa dérivée; et montrer que $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$, $\forall x, y \in D$

**Exercice 2.** *Entraînement au calcul d'intégrales (I).*

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^1 (3x^2 + 1)e^x \mathrm{d}x$
2. $\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\mathrm{d}x$
3. $\int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t$, $(x \in \mathbb{R})$
4. $\int_0^{\sinh(1)} \sqrt{x^2 + 1}\mathrm{d}x$
5. $\int_1^{\cosh(1)} \sqrt{x^2 - 1}\mathrm{d}x$

*Indications:* pour 4 et 5, on rappelle que $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$ et que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

**Exercice 3.** *Entraînement au calcul d'intégrales (II).*

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)}\mathrm{d}x$

**Exercice 4.** *D'autres applications de la décomposition en éléments simples.*

1. Donner une expression simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner une expression simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Donner la nature de la série $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4k^2-1}$ et calculer sa somme.

**Exercice 5.** **(*)** *Limite des normes de Lebesgue d'une fonction continue.*

Soit $f \in [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive dont le maximum vaut $M$. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \left( \int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = M.$$

*Remarque:* À $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, le membre de droite de l'équation définit la norme $L^p$ de la fonction $f$ et $M$ est sa norme $L^\infty$ (ou norme supremum). Cet exercice montre donc, dans le cas particulier des fonctions continues sur un segment, la propriété classique que la norme $L^\infty$ est la limite des normes $L^p$.