Preuve : On pose $\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$ (Polynôme de Taylor d'ordre n de f en a).

Soit $x \in I$, $x > a$. On définit pour $z \in I$,

$$g(z) = f(z) - P_n(z) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^{n+1}$$

On constate que g est $(n+1)$ fois dérivable sur I et on a

$$0 = g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) \text{ et } g(x) = 0$$

(en particulier car pour $k \in \{0, n\}$, $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, par construction, à vérifier tranquillement)

- Par le Thm. de Rolle appliqué à g : $\exists x_1 \in]a, x[$ t.q $g'(x_1) = 0$
- ——— appliqué à g' : $\exists x_2 \in]a, x_1[$ t.q $g''(x_2) = 0$

⋮

- Ainsi de suite jusqu'à : Rolle appliqué à $g^{(n)}$: $\exists x_{n+1} \in]a, x_n[$ t.q. $g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$.

C'est-à-dire :

$$0 = g^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1}) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}} \cdot (n+1)!$$

Ce qui entraîne : $f(x) = P_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_{n+1})$: Formule de Taylor.

Si $x = a$, la formule est évidente et le cas $x < a$ se traite de manière analogue ■

fin 11/11

4.10 Relation entre formule de Taylor et DL

En fait $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ n fois dérivable sur } I \\ f^{(n)} \text{ continue en } a \end{array} \right.$ suffit.

Thm: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $a \in I$. Si $f \in C^n(I)$ alors f admet le $DL_n(a)$ suivant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \text{ lorsque } x \to a$$

(Thm. de Taylor-Young

Preuve : D'après Taylor-Lagrange, $\forall x \in I \setminus \{a\}$, $\exists u_x \in]a, x[$ t.q

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(u_x)$$

Donc
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(u_x) - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right|$$

$$= \frac{|x-a|^n}{n!} \underbrace{\left| f^{(n)}(u_x) - f^{(n)}(a) \right|}_{\xrightarrow[x \to a]{} 0 \text{ par continuité de } f^{(n)} \text{ en } a.}$$

$$= o(|x-a|^n)$$ ■

Rmq : Si $f^{(n)}$ est dérivable et $\exists M > 0$ t.q $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, $\forall x \in I$ (on peut prendre un intervalle plus petit si besoin)
(hypothèse moins forte que de demander $f \in C^{n+1}(I)$).
alors on a une estimation plus précise du reste. Par Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u_x) \right| \quad \text{avec } u_x \in]a, x[$$

$$\leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = \underbrace{O(|x-a|^{n+1})}_{\text{implique } o(|x-a|^n)} \text{ lorsque } x \to a$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

4.11 Applications

1/ Calcul de limites (résoudre des formes indéterminées)

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6\sin(x) + x^3 - 6x}{x^5}$ (forme indéterminée $\frac{0}{0}$)

Par Taylor-Young on a un $DL_5(0)$ pour sin :

$$\sin(x) = \frac{\sin(0)}{0!} + \frac{\cos(0)}{1!}(x-0)^1 - \frac{\sin(0)}{2!}(x-0)^2 - \frac{\cos(0)}{3!}(x-0)^3$$
$$+ \frac{\sin(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{\cos(0)}{5!}(x-0)^5 + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$ on a même plus précisément $O(x^7)$

Donc $$\frac{6\sin(x)+x^3-6x}{x^5} = \frac{6\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)+x^3-6x}{x^5}$$

$$= \frac{\frac{6}{120}x^5+o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{20}+o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{20}.$$

2/ Extrema locaux

Soit I intervalle ouvert, $f \in C^2(I)$ et $a \in I$.

- On rappelle la condition nécessaire d'extremum local :

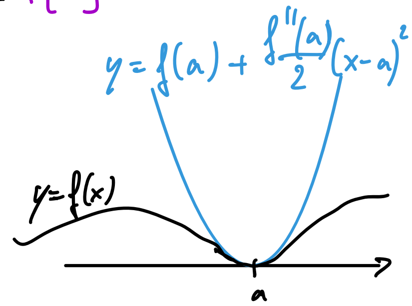
$$f \text{ atteint un extremum local en } a \Rightarrow f'(a)=0$$

- Montrons la condition suffisante suivante :

Prop : $f'(a)=0$ et $f''(a)\neq 0 \Rightarrow f$ atteint un extremum local en a.

Preuve : La formule de Taylor-Lagrange donne pour $x \in I \setminus \{a\}$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2!}f''(u_x)\cdot(x-a)^2 \text{ avec } u_x \in]a,x[$$



Supposons $f''(a)>0$. Comme $f''\in C^0(I)$:

$$\exists \delta>0,\ \forall u\in I,\ (|u-a|<\delta \Rightarrow f''(u)>0)$$

donc $\forall x \in I,\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \frac{1}{2!}f''(u_x)\cdot(x-a)^2>0$

$$\Rightarrow f(x)>f(a).$$

Donc f admet un minimum local strict en a (le cas où $f''(a)<0$ est similaire). ■

- Plus généralement, si pour $n\in\mathbb{N}$ on a $f\in C^{2n}(I)$ et $f'(a)=f''(a)=\dots=f^{(2n-1)}(a)=0$ et $f^{(2n)}(a)\neq 0$ alors f admet un extremum local en a.

3) Point d'inflexion

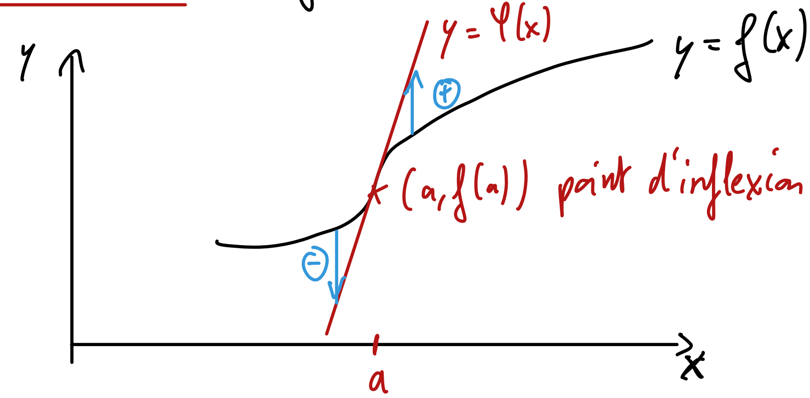
Soit I intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ t.q. $f'(a)$ existe. On rappelle que la fonction :

$$\varphi : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a) + f'(a)\cdot(x-a) \end{vmatrix}$$

a pour graphe la tangente au graphe de f en a.

Def : On dit que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f ssi $f - \varphi$ change de signe en a. Autrement dit si $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*, \exists \delta > 0$ t.q

$\forall x \in I$ t.q $0 < |x-a| < \delta$, $\qquad \alpha \cdot \big(f(x) - \varphi(x)\big)\cdot(x-a) > 0$



Prop : Si $f \in C^{2n+1}(I)$ et $f''(a) = f^{(3)}(a) = \dots = f^{(2n)}(a) = 0$ et $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$
Alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de a.

Preuve : On a $f(x) - \varphi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)\cdot(x-a) \qquad (x \in I \setminus \{a\})$

$$= f^{(2n+1)}(u_x)\cdot \frac{(x-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{avec } u_x \in \,]a, x[$$

$\exists \delta > 0$, t.q $f^{(2n+1)}(u_x) \cdot \dfrac{(x-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,(x-a)$ est de signe constant sur $]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$. Donc $f - \varphi$ change de signe en a. ∎

4.12 Règle de Bernoulli - L'Hôpital

Thm (Règle de Bernoulli - L'Hôpital). Soit $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables t.q g et g' ne s'annulent pas sur $]a,b[$. On suppose :

1) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \alpha \in \{0, +\infty, -\infty\}$.

2) $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors on a $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$

Exemple :

$$\lim_{x \to 0+} -x \log(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{-\log(x)}{1/x} \overset{B \cdot H\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} x = 0 \quad (= \mu)$$

Rmq : requiert moins de régularité qu'un DL en a ($f_d'(a)$ et $g_d'(a)$ peuvent ne pas exister).

Lemme (TAF généralisé). Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$ alors

$$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve : Si $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$ alors $g(a) \neq g(b)$ (contraposée de Rolle).

Soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

On a $h(a) = h(b) = 0$ donc par le Thm de Rolle, $\exists c \in]a,b[$ t.q.

$$0 = h'(c) = f'(c) - g'(c) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ d'où le résultat (car $g'(c) \neq 0$). ∎

Preuve de B.H :

1°/ Supposons $\alpha = 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On prolonge f et g par 0 en a. Pour $x \in]a, b[$, d'après le TAF généralisé :

$$\exists u_x \in]a, x[\quad t.q \quad \frac{f'(u_x)}{g'(u_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

En faisant tendre x vers $a+$, on obtient le résultat.

2°/ Supposons $\alpha = +\infty$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par les hypothèses (i) et (ii) :

$$\exists x_0 \in]a, b[\ t.q \ \forall x \in]a, x_0[\ , \quad f(x) > 0 \ \text{et} \ \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \mu \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après le T.A.F généralisé, si $x \in]a, x_0[$, $\exists \xi_x \in]x, x_0[\ t.q \ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$.

$$\text{Ainsi } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \mu \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \mu \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On souhaite maintenant se débarasser de $f(x_0)$ et $g(x_0)$ dans cette expression.

On a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \overbrace{\left(\dfrac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} \right)}^{h(x)}$. Grâce à i) on a $\lim\limits_{x \to a+} h(x) = 1 = \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{1}{h(x)}$.

Ainsi : $\exists d \in]a, x_0[\ t.q \ \forall x \in]a, d[\ , \ h(x) \neq 0$ et $\left| \dfrac{1}{h(x)} - 1 \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + 2|\mu|}$

Il s'ensuit, $\forall x \in]a, d[$ que $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - \mu \right| = \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| \left| \dfrac{1}{h(x)} - 1 \right| + \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \mu \right|$

$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + |\mu| \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2|\mu|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cela montre $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \mu$.

3°/ Si $\mu = \infty$: montrer $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ grâce au cas précédent.

4°/ Les cas restants sont similaires