

Preuve: $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $k = \sup_{x \in I} |f'(x)| \in \mathbb{R}$. Soit $x, y \in I$ r.g. $x < y$.

Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$.

Donc $|f(y) - f(x)| \leq k \cdot |y - x|$. Ainsi f est k -lipschitzienne.

$\boxed{\Rightarrow}$ Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ r.g. $\forall (x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

$\leftarrow$ fin 6/11

$$\text{Donc } \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq k \quad \text{du moment que } y \neq x.$$

Donc en passant à la limite $y \rightarrow x$ on déduit $|f'(x)| \leq k$.

Ainsi f' est bornée sur I . ▀

4.8 Développements limités

Def: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 (abrégé en $DL_n(x_0)$) ssi :

il existe $(n+1)$ réels $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n}_{\text{Partie Principale du DL}} + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\text{Reste du DL}}$$

$$\text{où } \varepsilon(x) = o_{x_0}(|x - x_0|^n).$$

Autrement dit :

f admet un $DL_n(x_0)$ $\Leftrightarrow \exists P$ polynôme réel de degré $\leq n$ tel que $f(x) = P(x) + o_{x_0}(|x - x_0|^n)$.

$\downarrow$
ou $P(x - x_0)$ (équivalent)

Prop. (unicité). Si $\forall x \in D$ $f(x) = P(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$, $\deg(P) \leq n$
 et $f(x) = Q(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$, $\deg(Q) \leq n$

Alors $Q = P$.

Preuve: On a $\deg(P-Q) \leq n$ et $P(x-x_0) - Q(x-x_0) = o((x-x_0)^n)$.

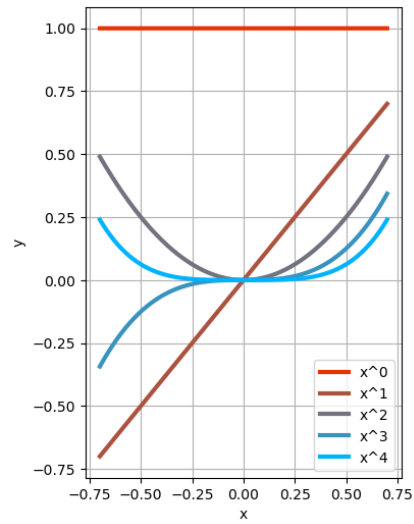
Par l'absurde, suppose que $P \neq Q$ et soit

$a_k x^k$, $0 \leq k \leq n$ le terme de plus petit degré de $P-Q$.

On a $a_k \neq 0$ et

$$\frac{(P-Q)(x-x_0)}{(x-x_0)^k} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_k \neq 0 \quad \text{ce qui contredit } (P-Q)(x-x_0) = o((x-x_0)^k)$$

Ainsi $P = Q$



Prop. (troncature de DL). Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_1(x)$ est le $DL_n(x_0)$ de f

Alors $f(x) = \sum_{k=0}^p a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) = \sum_{k=p+1}^n a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_1(x)$
 est le $DL_p(x_0)$ de f .

Preuve: Il suffit de remarquer que $\varepsilon_2(x) = o((x-x_0)^p)$.

Prop: 1/ f admet un $DL_0(x_0) \iff f$ admet une limite en x_0 .

2/ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet un } DL_1(x_0) \\ \text{et } f \text{ est continue en } x_0 \end{array} \right. \iff f \text{ est dérivable en } x_0$.

On a alors $\forall x \in D$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + o(x-x_0)$.

Preuve: 1/ Immédiat 2/ On retrouve la caractérisation de la dérivabilité

⚠ On verra ci-dessous: f n -fois dérivable en $x_0 \implies \left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet un } DL_n(x_0) \\ f \text{ continue en } x_0 \end{array} \right.$
 (Taylor-Young) ~~fauxse pour $n \geq 2$~~

Contre exemple à l'implication réciproque :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

1/ f admet un $DL_2(0)$ car $f(x) = 0 + o(x^2)$ car $\left| \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

2/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^3 \cdot \frac{2x}{x^4} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

3/ f' discontinue en 0, donc f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Prop. (Parité et DL). Soit f admettant un $DL_n(0)$ de partie principale $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

1/ f paire $\Rightarrow P$ pair (c-à-d : $a_k = 0$, $\forall k$ impair)

2/ f impaire $\Rightarrow P$ impair (c-à-d : $a_k = 0$, $\forall k$ pair).

Preuve : Comme $\forall x \in D$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $\forall x \in D$, $f(-x) = P(-x) + o(x^n)$ et $\deg(P(-x)) \leq n$.

Si f est paire, par unicité du $DL_n(0)$ de f on a $P(x) = P(-x)$ donc P est pair.

Le cas impair se traite de façon similaire

Rmq : les DL sont des fonctions en bonne et due forme que l'on peut sommer, multiplier, diviser et composer. (! Requier de la pratique).

Combinaison linéaire : si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k + \varepsilon_2(x)$ avec ε_1 et ε_2 dans $o_{x_0}(|x-x_0|^n)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\alpha f + \beta g)(x_0) = \sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \beta b_k) \cdot (x-x_0)^k + \varepsilon_3(x) \quad (DL_n(0) \text{ de } \alpha f + \beta g).$$

$$\text{on } \varepsilon_3(x) = \alpha \varepsilon_1(x) + \beta \varepsilon_2(x) = o(|x-x_0|^n).$$

Multiplication (exemple).

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_1(x) \text{ avec } \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 & (DL_2(0) \text{ de } f) \\ \text{et } g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_2(x) \text{ avec } \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 & (DL_2(0) \text{ de } g) \end{cases}$$

Alors :

$$(f \cdot g)(x) = a_0 \cdot b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1) \cdot x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) \cdot x^2 + h(x)$$

$$\text{avec } h(x) = a_0 \cdot x^2 \varepsilon_2(x) + a_1 \cdot b_2 x^3 + a_1 x^3 \varepsilon_2(x) + a_2 \cdot b_1 \cdot x^3 + a_2 \cdot b_2 \cdot x^4 + a_2 \cdot x^4 \cdot \varepsilon_2(x) + x^2 \varepsilon_1(x) \cdot g(x)$$

On observe que $h(x) = o(x^2)$ donc l'expression pour $f \cdot g$ ^(ci-dessus) est son $DL_2(0)$.

On ne peut pas déduire un DL à un ordre supérieur ici (à cause par exemple du terme $a_0 \cdot x^2 \cdot \varepsilon_2(x)$ qui n'est pas $o(x^3)$ en général).

4.9 Formule de Taylor - Lagrange

Thm: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur I . Si $a \in I$ alors $\forall x \in I$, $\exists \theta_x \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a)).$$

On pourra l'écrire ainsi :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(u_x) \text{ avec } u_x \in]a, x[$$

Formule de Taylor - Lagrange

Rmq: Observer que le cas $n=0$ est équivalent au TAF :

$$f(x) = f(a) + f'(u_x) \cdot (x-a) \text{ avec } u_x \in]a, x[.$$

Preuve: On pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ (Polynôme de Taylor de f en a).

Soit $x \in I$, $x > a$. On définit pour $z \in I$,

$$g(z) = f(z) - p_n(z) + \frac{p_n(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^{n+1}$$

On constate que g est $(n+1)$ fois dérivable sur I et on a

$$0 = g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) \text{ et } g(x) = 0$$

(en particulier car pour $k \in \{0, n\}$, $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, par construction, à vérifier tranquillement)

• Par le Thm. de Rolle appliqué à g : $\exists x_1 \in]a, x[$ t.q. $g'(x_1) = 0$

- Par le Thm. de Rolle appliqué à g : $\exists x_1 \in]a, x[$ t.q. $g'(x_1) = 0$
- appliqué à g' : $\exists x_2 \in]a, x_1[$ t.q. $g''(x_2) = 0$

- Ainsi de suite jusqu'à : Rolle appliqué à $g^{(n)}$: $\exists x_{n+1} \in]a, x_n[$ t.q. $g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$.

C'est-à-dire :

$$0 = g^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1}) + \frac{p_n(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}} \cdot (n+1)!$$

Ce qui entraîne : $f(x) = P_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_{n+1})$: Formule de Taylor,

Si $x = a$, la formule est évidente et le cas $x < a$ se traite de manière analogue. 

← Fin 11/11