

$$(1) f_n(x) = x^n, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{On a } f'_n(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} y^{n-1} + xy^{n-2} + \dots + x^{n-2}y + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

$(y-x) \cdot (y^{n-1} + xy^{n-2} + \dots + x^{n-2}y + x^{n-1}) = y^n - x^n$

$$(2) g_n(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*, D = \mathbb{R}^*$$

$$\text{R\`egle de l'inverse : } g'_n(x) = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$$

$$(3) f(x) = \sin(x) \text{ sur } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{On a : } f(y) - f(x) = \sin(y) - \sin(x) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \text{ donc } \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \cos(x)$$

→ La d\`eriv\`ee de sin est cos. La d\`eriv\`ee de $\cos(\cdot) = \sin(\cdot + \frac{\pi}{2})$ est $\cos(\cdot + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\cdot)$

$$(4) f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{R\`egle du quotient : } f'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$

$$(5) f(x) = \arctan(x), x \in \mathbb{R}$$

$$\text{D\`eriv\`ee de la r\`eciproque : } f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Fin 04/11

4.5 Espaces $C^k(D)$

Def : Soit $f \in C^0(D)$ d\`erivable sur D , $D \subset \mathbb{R}$ ouvert.

- Si $f' \in C^0(D)$ alors on dit que f est contin\`ument d\`erivable (sur D) et on note $f \in C^1(D)$
- Plus g\`en\`eralement, pour $k \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)} \in C^0(D)$ alors on dit que f est k -fois contin\`ument d\`erivable et on note $f \in C^k(D)$.
- On d\`efinit  $C^\infty(D) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(D)$  l'ensemble des fonctions ind\`efiniment d\`erivables.

On a, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$C^\infty(D) \subset C^{k+1}(D) \subset C^k(D) \subset C^0(D)$$

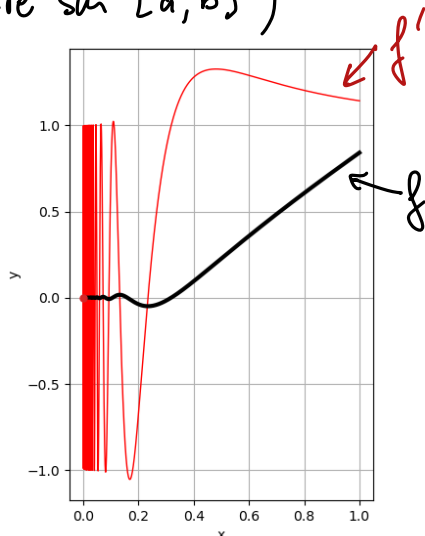
Def: Pour $a < b$ réels, on écrit $f \in C^1([a, b])$ ssi

$$\begin{cases} f \in C^1(]a, b[) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(Interprétation: on veut $f' \in C^0(]a, b[)$ prolongeable par continuité sur $[a, b]$)

Exemple A: $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



• f continue sur $[0, 1]$ (gendarmes en 0)

• $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ si $x \in]0, 1[$

$f'_g(1) = 2 \sin(1) - \cos(1)$ et $f'_d(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin(\frac{1}{h}) = 0$

• Comme $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ n'existe pas, $f \notin C^1([0, 1])$

→ ces calculs ne sont pas nécessaires pour déterminer si f est dans $C^1([0, 1])$. Mais ils illustrent que la réciproque du Thm "limite de la dérivée" (plus bas) est fausse.

Exemple B: $g:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• g continue sur $[0, 1]$

• $g'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x})$ si $x \in]0, 1[$

• $g'_g(1) = 3 \sin(1) - \cos(1)$, $g'_d(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x)$

• Ainsi $g \in C^1([0, 1])$ (mais $g \notin C^2([0, 1])$).

4.6 Thm de Rolle et des accroissements finis

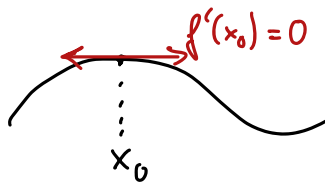
Thm (cdt^o nécessaire d'extremum). Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D$ et dérivable en x_0 . Si f admet un extremum local en x_0 alors

$$f'(x_0) = 0.$$

⚠ Ce n'est pas une condition suffisante. Par exemple $f(x) = x^3$ satisfait $f'(0) = 0$ mais On n'est pas en un extremum local.

Preuve: Supposons que f admet un maximum local en x_0 (le cas du minimum est analogue). Donc:

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \quad x \in D \text{ et } f(x) \leq f(x_0)$$



Alors:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

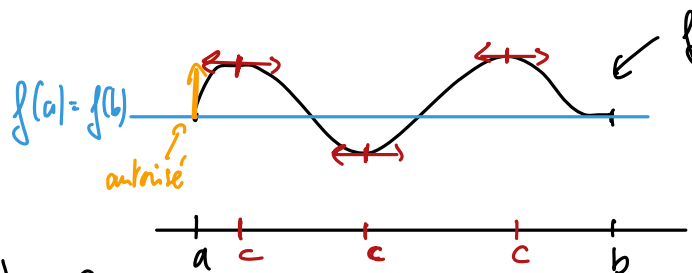
Puisque $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, on a donc $f'(x_0) = 0$. ■

Thm de Rolle: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si:

i) f continue sur $[a, b]$.

(ii) f dérivable sur $]a, b[$

(iii) $f(a) = f(b)$



Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve: Comme f continue sur $[a, b]$, elle atteint ses bornes. Posons

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

- Si $m = \Pi$ alors f est constante sur $[a, b]$, donc $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$
- Si $m \neq \Pi$ alors m au Π diffère de $f(a) = f(b)$; supposons par exemple $\Pi \neq f(a) = f(b)$ (l'autre cas est analogue). Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $\Pi = f(c)$ et donc f admet un max. local en c et donc $f'(c) = 0$, par le Thm. précédent. ■

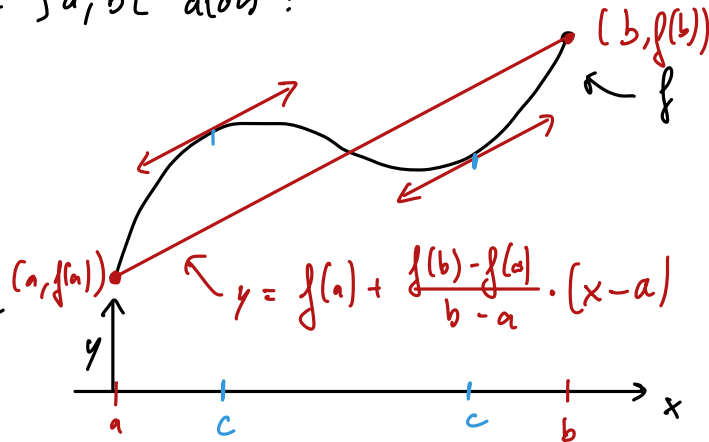
Thm. des accroissements finis (mean-value Thm). Soit $a < b, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors :

$$\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$$

Preuve: Considérons $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right)$$



g continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $g(a) = g(b) (= 0)$.

Par le Thm. de Rolle, $\exists c \in]a, b[$ t.q. $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ ■

Corollaire: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On a :

- f est **croissante** sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in]a, b[$.
- f est **croissante** sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in]a, b[$.
- f est **décroissante** sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in]a, b[$.
- f est strict. **croissante** sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$.
- f est strict. **décroissante** sur $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$.

⚠ Pas de réciproque pour iv) et v). Par exemple $f:]\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ strict. $\nearrow$ mais $f'(0) = 0$.

Preuve: $\boxed{\Leftarrow}$ se déduisent du T.A.F. $\boxed{\Rightarrow}$ étude du signe de f'_d et f'_g (comme fait plus haut) ■

Thm (limite de la dérivée). Soit $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ existe et vaut $l \in \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$ alors $f'_d(a) \stackrel{\text{existe}}{=} l$.

(idem pour la dérivée à gauche).

⚠ L'implication réciproque est fautive, cf. Exemple A ci-dessus.

Preuve: Supposons $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l$. Par le T.A.F si $x \in]a, b[$, $\exists c_x \in]a, x[$

$$\text{t. q.} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \quad \text{composition de limites } (f' \circ c)(x)$$

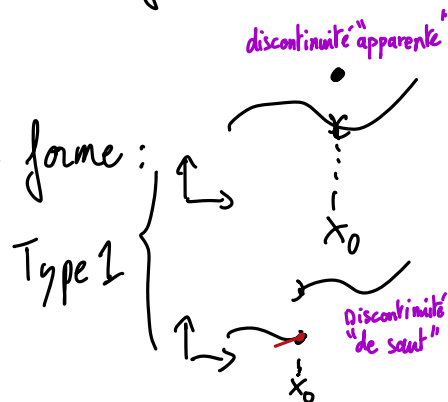
On obtient ainsi $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(c_x) = l$, ce qui montre $f'_d(a) = l$.

En combinant les limites à droite et à gauche, on obtient:

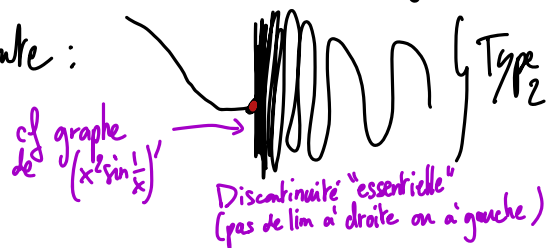
Corollaire: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. Alors:

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ alors f dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

→ Une fonction dérivée ne pas avoir des discontinuités de la forme:



• peut être de la forme suivante:



Caractérisation des fonctions dérivables lipschitziennes

Thm: Soit I un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors

$$(f \text{ lipschitzienne sur } I) \Leftrightarrow (f' \text{ bornée sur } I)$$

Preuve: $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $k = \sup_{x \in I} |f'(x)| \in \mathbb{R}$. Soit $x, y \in I$ r.g. $x < y$.

Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$.

Donc $|f(y) - f(x)| \leq k \cdot |y - x|$. Ainsi f est k -lipschitzienne.

$\boxed{\Rightarrow}$ à suivre...

← fin 6/11