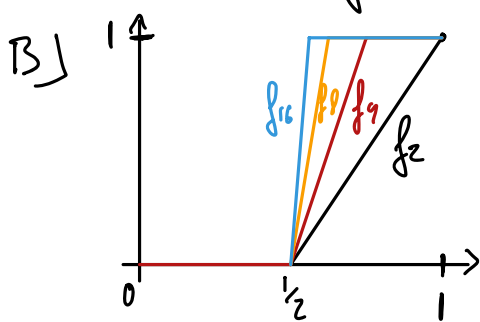




$$D = [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$f_n(x) = \max\left\{0, \min\left\{1, n\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}\right\}$$

$$\text{On a } \forall x \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

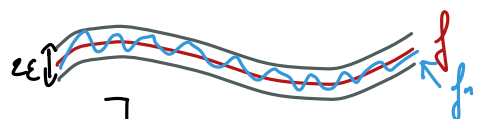
→ la convergence préserve peu de propriétés. Introduisons une notion "plus forte" de convergence.

Def: On dit que (f_n) converge uniformément vers f ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On choisit x après N (contrairement à la cvgce simple)

$$\text{On note } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{unif.}} f$$



$$\text{Rmq: } \left[f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \right] \Leftrightarrow \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \right]$$

$$* \left[f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \right] \not\Rightarrow \left[f_n \xrightarrow{\text{simp.}} f \right]$$

← en particulier la cvgce de l'ex. [A] n'est pas unif.

Thm. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et (f_n) suite dans $\overbrace{C^0(I)}^{\text{ensemble des fct}^0 \text{ continues sur } I}$, t.q. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{unif.}} f$.
Alors $f \in C^0(I)$.

Preuve: Soit $x_0 \in I$ et montrons que f est continue en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$.

$$* \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\Leftarrow \text{cvgce unif.})$$

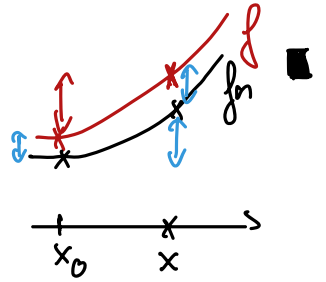
$$(\text{f}_n \text{ continue} \Rightarrow) * \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3})$$

Alors $\forall x \in I$ t.q. $|x - x_0| < \delta$ on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{Donc } f \text{ continue en } x_0.$$

Comme x_0 arbitraire, cela montre $f \in C^0(I)$



Ainsi dans l'exemple B] la convergence n'est pas uniforme (limite f discontinue)

Autre exemple: Posons $f_n(x) = 1 + \frac{1}{n}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{simpl.}} f$ avec $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n} = +\infty$ donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$

En revanche $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|x|}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Donc la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

Thm de Dini. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et (f_n) une suite dans $C^0([a, b])$. Si

* $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{simpl.}} f$ avec $f \in C^0([a, b])$
et * (f_n) est croissante, c-à-d, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Alors la convergence est uniforme : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{unif.}} f$.

Preuve: Supposons par l'absurde que la convergence n'est pas uniforme, c-à-d:

$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n, \exists x \in [a, b], |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ (**)

Fixons un tel $\varepsilon > 0$. On peut construire deux suites $\begin{cases} (x_i)_{i \in \mathbb{N}} & \text{dans } [a, b] \\ (n_i)_{i \in \mathbb{N}} & \text{dans } \mathbb{N} \end{cases}$

telles que $\begin{cases} |f_{n_i}(x_i) - f(x_i)| \geq \varepsilon \\ n_{i+1} > n_i \end{cases}, \forall i \in \mathbb{N}.$

Comme (x_i) est bornée, on peut (B.V.) extraire une sous-suite $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$

qui converge, notons c sa limite. On a $c \in [a, b]$.
 Pour simplifier la notation, notons $(\tilde{x}_e) = (x_{i_e})$ et $(\tilde{n}_e) = (n_{i_e})$.

* Comme $f_n \xrightarrow{\text{simp.}} f$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $|f_N(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{6}$.

* Comme f et f_N sont continues, $\exists L \in \mathbb{N}$, $\forall l \geq L$, $\left\{ \begin{array}{l} |f(c) - f(\tilde{x}_e)| < \frac{\varepsilon}{6} \\ \text{et} \\ |f_N(c) - f_N(\tilde{x}_e)| < \frac{\varepsilon}{6} \end{array} \right.$

Comme la suite (f_n) est croissante, on a pour $l \geq \max\{N, L\}$:

(**)

$\varepsilon \ll \underbrace{f(\tilde{x}_e) - f_{\tilde{n}_e}(\tilde{x}_e)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{par croissance de} \\ (f_n)}} \ll f(\tilde{x}_e) - f_N(\tilde{x}_e)$

$$\begin{aligned} &\ll |f(\tilde{x}_e) - f(c)| + |f(c) - f_N(c)| + |f_N(c) - f_N(\tilde{x}_e)| \\ &\ll \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2} \quad : \text{contradiction} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bien sûr, on a la même conclusion sous l'hypothèse (f_n) est décroissante.

Chapitre 4 : Calcul différentiel

Préliminaire : Notation de Landau

Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

• "Grand O" :

On dit f est dominée par g au voisinage de x_0 ssi :

$\exists C > 0, \exists \delta > 0$ tels que $\forall x \in D, (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|)$

On note $f = O_{x_0}(g)$ ou bien $f(x) = O(g(x))$

on peut $\uparrow$ omettre x_0 si le contexte est clair.

• "Petit o" : on suppose que $\exists \delta > 0, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ on a $g(x) \neq 0$

On dit f est négligeable devant g au voisinage de x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

On note $f = o_{x_0}(g)$ ou bien $f(x) = o(g(x))$

Exemples : • Au voisinage de zéro :

$$1000 = O\left(\frac{1}{100}\right), \quad 3\cos(x) = O(1), \quad x = o(1), \quad x^2 = o(x), \quad \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

• Au voisinage de $+\infty$ (adopter la définition avec $x_0 = +\infty$) :

~~$x = O(1)$~~ , $x = O(x^2)$ (en effet : $\exists C > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, |x| \leq C \cdot |x^2|$)
par exemple $A = C = 1$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \sin(x) = O(1)$$

* Détail de la définition :
au voisinage de $+\infty$: $f = O(g) \Leftrightarrow \exists A > 0, C > 0, \forall x \geq A, |f(x)| \leq C |g(x)|$

$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Remarques: * $f(x) = o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

* la notation $f \in O(g)$ ou $o(g)$ serait plus correcte; mais moins commode.

ensembles de fonctions.

→ En particulier $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g) \not\Rightarrow f_1 = f_2$.

ce ne sont pas des égalités au sens mathématique.