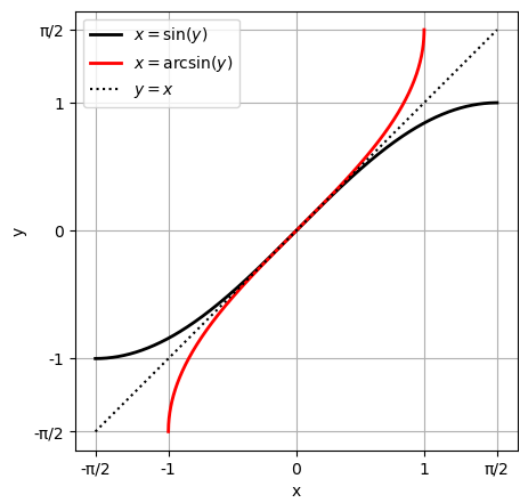
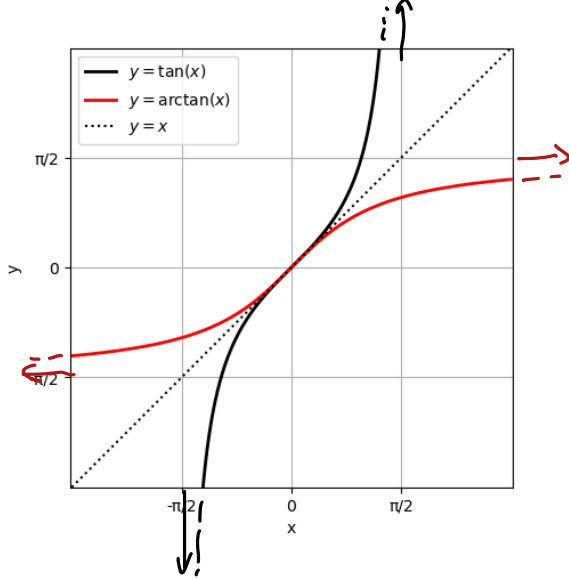




$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$
 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 (strict. $\nearrow$, surjectives, continues)

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$
 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 (strict. $\nearrow$, surjectives, continues)

fin cours 16/10

* Séance du soir : mercredis 17^h30 - 19^h00 CO 120

3.4 Continuité uniforme

Def: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I \quad (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

↑ indépendant de x, y

f continue $\Leftrightarrow$ ~~f~~ f uniformément continue

Exemples: A) Soit $\alpha > 0$ et $f :]\alpha; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|y - x|}{x \cdot y} \leq \frac{|y - x|}{\alpha^2}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$, avec $\delta = \varepsilon \cdot \alpha^2$ on a $\forall x, y \in I$,
 $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\delta}{\alpha^2} = \varepsilon$: donc f uniformément continue.

B) Soit $\alpha > 0$ et $g : \begin{cases} [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 2\alpha |x - y|$

Donc pour $\varepsilon > 0$, avec $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ on a $\forall x, y \in I$,

$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2\alpha\delta = \varepsilon$

donc g uniformément continue

Rmq : $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue (sur I) ssi :

* $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in I$ t.q. $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

ou encore, en prenant $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$:

* $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists$ deux suites (x_n) et (y_n) dans I t.q. $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0 \\ \text{ou} \\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exemples : A) $f : \begin{cases}]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$

Posons $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (dans $]0, 1[$).

On a $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

et $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n+1)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc f pas uniformément continue sur $]0, 1[$.

B') $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ Posons $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

On a $y_n - x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

et $|f(x_n) - f(y_n)| = |n^2 - (n + \frac{1}{n})^2| = |2 + \frac{1}{n^2}| \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Donc g pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Thm: Une fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.

Preuve: Par l'absurde. Supposons $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue mais pas uniformément continue.

Alors $\exists \varepsilon > 0$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ dans $[a, b]$ t.q. $\begin{cases} |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Par B.W. (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $c \in [a, b]$.

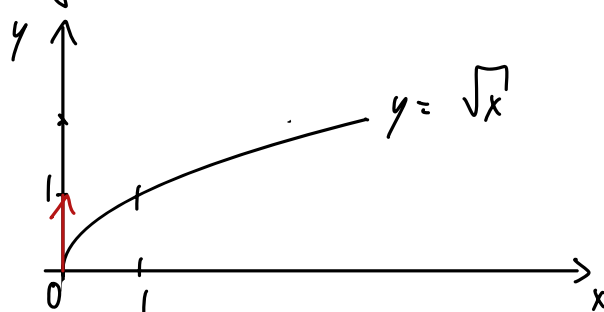
On a $|y_{n_k} - c| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - c| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Ainsi $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c$. Comme f est continue en c , $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
 $\rightarrow f(c) \quad \rightarrow f(c)$

Ce qui contredit $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ ■

Exemple: $\begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

uniformément continue.



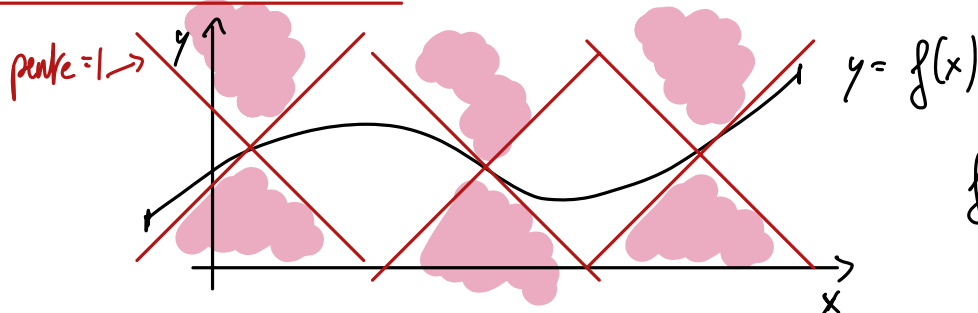
3.5 Fonctions Lipschitziennes

appelée "constante de Lipschitz".

Def: Une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite k -Lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+$)ssi

$$\forall x, y \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

f est dite Lipschitzienne si $\exists k \in \mathbb{R}_+$ t.q. f est k -Lipschitzienne.



f est 1-Lipschitzienne

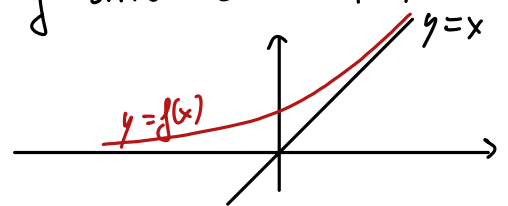
Si $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ alors

f lipschitzienne $\stackrel{\times}{\Rightarrow}$ f uniformément continue $\stackrel{\times}{\Rightarrow}$ f continue

Def: Si f est k -lip. avec $\begin{cases} k \leq 1 \text{ on dit que } f \text{ est contractante} \\ k < 1 \text{ on dit que } f \text{ est strictement contractante} \end{cases}$

⚠ $|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y$ n'implique pas f strict. contractante.

Par exemple : $f(x) = \log(1 + \exp(x))$
(pas de point fixe)



Thm (point fixe de Banach). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement contractante. Alors f admet un unique point fixe, c.-à.-d. :
il existe un unique.
 $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

Rmq: * le "strictement" est nécessaire ; en effet $f(x) = 1 + x$ est 1-lip. mais n'admet pas de point fixe (aussi : exemple ci-dessus)

* Autre Thm. de point fixe (cf. série 7.1, exercice 3) :

Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet un (au moins) point fixe.

Preuve : (Point fixe de Banach)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in [0, 1[$ t. q. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$.

Existence : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k \cdot |x_n - x_{n-1}|$.

Par récurrence, on a donc :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$$

Ainsi $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\leq |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (k^{n+m-1} + k^{n+m-2} + \dots + k^n) \cdot |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

$$= k^n \cdot \frac{1-k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot |x_1 - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc (x_n) est de Cauchy, donc elle converge. Soit $c \in \mathbb{R}$ sa limite. On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c \\ f(c) \end{cases} \quad (\text{car } f \text{ lip.} \Rightarrow f \text{ continue}).$$

Donc $c = f(c)$: point fixe.

Unicité: Soient $c, d \in \mathbb{R}$ deux points fixes de f . On a:

$$|c - d| = |f(c) - f(d)| \leq k \cdot |c - d| \Rightarrow (1-k) \cdot |c - d| \leq 0$$

Comme $k \in [0, 1[$, on en déduit $|c - d| = 0$ donc $c = d$. ■

3. 6 Suites de fonctions

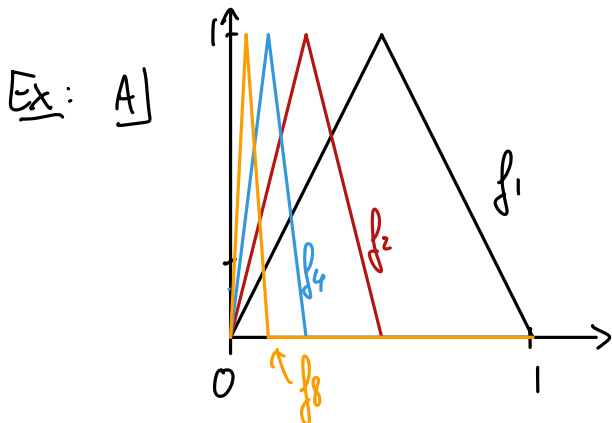
Soit $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur D .

c-a-d, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Def: On dit (f_n) converge (on converge simplement/ponctuellement) vers f ssi

$$\forall x \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

On note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{simpl.}} f$ ↪ limite d'une suite réelle



$D = [0, 1]$, $\forall n \geq 1$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2nx & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Si $x = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

Si $x > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < x$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

Ainsi $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{simpl.}} 0$