

On note $f \in \underbrace{C^0(]a, b[)}_{\text{ensemble des fonctions continues sur }]a, b[}$ (resp. $f \in C^0([a, b[)$), etc ...

Rmq: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Avec ces définitions, on a:

$(f \text{ continue sur } I) \Leftrightarrow \forall x_0 \in I, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ dans } I, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \right)$

Opérations préservant la continuité:

► Règles algébriques: si f et g continues sur I alors:

* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha f, f+g, f \cdot g$ sont continues sur I
* si $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I

se déduit
des propriétés
de la limite.

► Composition: si $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ continues alors $g \circ f$ est continue sur I .

En effet, $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ dans } I \text{ tq } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in I$ alors

$$g(f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))$$

[livre mentionné: Mathematica (D. Bessis)]

→ Comme $\begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$ est continue, on déduit que toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition (grâce aux règles algébriques).

→ On admet aussi (temporairement): exp, log, sin, cos continues sur leur domaine.

Prolongement par continuité

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in E$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors

$$\tilde{f}: \begin{matrix} E \cup \{x_0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{matrix}$$

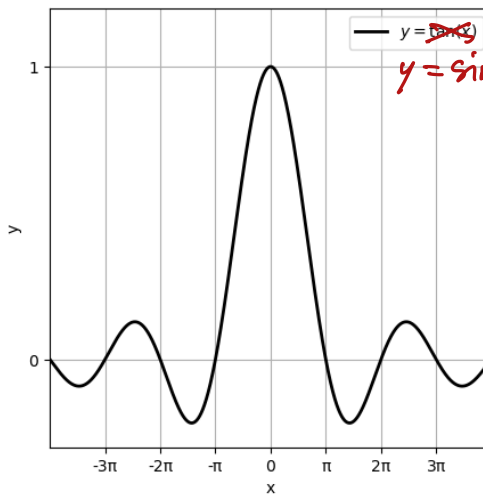
est continue en x_0 et appelée
le prolongement par continuité de f
(au point x_0).

Ex: le prolongement par continuité de

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

est

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$



$y = \text{sinc}(x) = \tilde{f}(x)$
 "sinus cardinal"

3.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

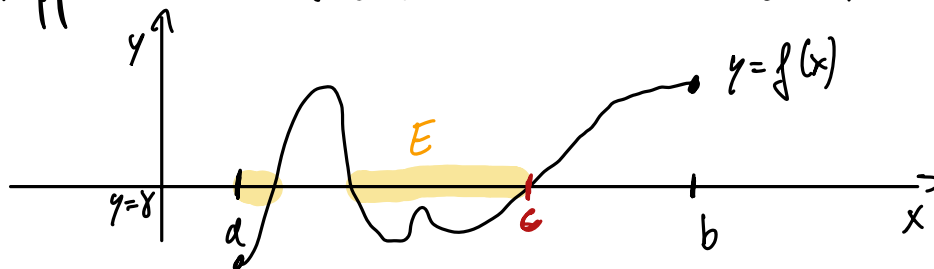
Thm: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(a, b) \in I^2$ t.q $f(a) < f(b)$. Alors :

$$\forall \gamma \in [f(a), f(b)] , \exists c \in [a, b], f(c) = \gamma.$$

"L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle"

Preuve: Trivial si $\gamma = f(a)$ ou $\gamma = f(b)$. Considérons $f(a) < \gamma < f(b)$.

On suppose $a < b$ (l'autre cas étant similaire).



$$\text{Soit } E = \{ x \in [a, b]; f(x) \leq \gamma \}$$

Soit $c = \sup E \in \mathbb{R}$ qui existe car E est $\left\{ \begin{array}{l} \text{non vide car } a \in E \\ \text{majoré par } b \end{array} \right.$

Montrons que $f(c) = \gamma$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E \text{ et } y_n \in [a, b] \setminus E \text{ t.q.}$$

$$c - \frac{1}{n} \leq x_n \leq c < y_n \leq c + \frac{1}{n}$$

caractérise analytique du sup

$\hookrightarrow$ Existe car $c < b$ (en effet $\left\{ \begin{array}{l} \gamma < f(b) \\ f \text{ continue en } b \end{array} \right.$)

Alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$ et $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$ et par continuité de f :
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(c) \\ f(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(c) \end{array} \right.$$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq \gamma$ et $f(y_n) > \gamma$ d'où, à la limite: $\gamma \leq f(c) \leq \gamma$.

Autre preuve possible: créer 2 suites adjacentes par dichotomie (expliqué à l'oral).

3.3.3 Continuité sur un segment

Segment = intervalle fermé borné: $I = [a, b]$ avec $a \leq b$.

Thm: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
Alors (i) f est bornée et (ii) atteint ses bornes.

En combinant avec le TVI, on a si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors

$$f([a, b]) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right].$$

"L'image d'un segment par une fonction continue est un segment".

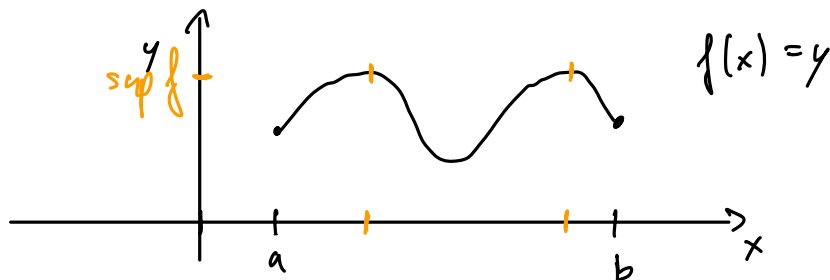
Preuve du Thm:

(i) Supposons que f non majorée. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ tq $f(x_n) > n$
Par B-W. $\exists$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$
Par continuité de f en c : $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(c) \in \mathbb{R}$

Mais $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x_{n_k}) > n_k \geq k$ donc $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$: contradiction.
Donc f est majorée.

Le même raisonnement appliqué à $-f$ montre que f est minorée.
Ainsi f est bornée.

(ii)



Soit $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$, $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$ (*)

Par B-W, $\exists$ une sous-suite (x_{n_k}) t.q. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = d \in [a, b]$

On a alors $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \begin{cases} M & \text{par (*)} \\ f(d) & \text{par continuité} \end{cases}$

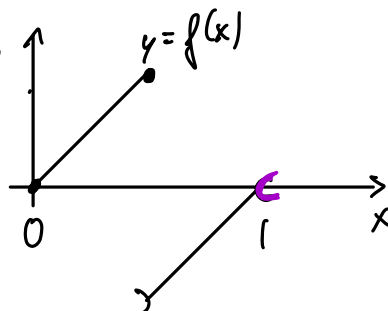
Ainsi $\exists d \in [a, b]$, $M = f(d)$.

(Raisonnement analogue pour le minimum)

3.3.4 Continuité et monotonie

Thm: Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors:
 f injective $\Leftrightarrow f$ strictement monotone

Contre-exemple si f pas continue:



Preuve: $\Leftarrow$ Immédiat car si $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ alors

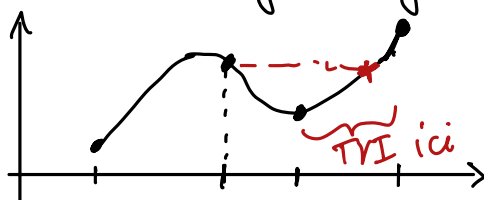
alors $\begin{cases} \text{soit } f(x_1) < f(x_2) \\ \text{soit } f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$ dans les 2 cas.

$\Rightarrow$ Soient $a, b \in I$, $a < b$. On suppose $f(a) < f(b)$ (l'autre cas est similaire).
 Supposons, par l'absurde, que f n'est pas strict. $\nearrow$ sur $[a, b]$.

$\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$.

f injective $\Rightarrow (f(x_1) > f(x_2) \text{ et } (f(x_1) < f(b) \text{ ou } f(x_1) > f(b)))$

• Si $f(x_1) < f(b)$ alors $f(x_2) < f(x_1) < f(b)$.



Par le TVI, $\exists c \in [x_2, b]$ tq $f(c) = f(x_1)$

Comme $x_1 \notin [x_2, b]$ donc $c \neq x_1 \Rightarrow$ contredit f injective!

• Si $f(x_1) > f(b)$ alors $f(a) < f(b) < f(x_1)$

Par le TVI, $\exists c \in [a, x_1]$ tq $f(c) = f(b)$.

Comme $b \notin [a, x_1]$ donc $c \neq b \Rightarrow$ contredit f injective!

On a montré que f est strict. $\nearrow$ sur $[a, b]$.

Comme a, b quelconques dans I , on montre ainsi que f est strict. monotone

sur I

Autre preuve possible par $\Rightarrow$: par contraposition.

Nb (f strict. monot.) $\Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, tq $x_1 < x_2$ et $x_3 < x_4$ et $f(x_1) \leq f(x_2)$ et $f(x_3) \geq f(x_4)$
puis montrer que f pas injective en traitant différents cas (avec le TVI).

Thm. Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles non vides et $f: I \rightarrow J$ surjective et strictement monotone. Alors :

- (i) f est continue,
- (ii) f admet une fonction réciproque $f^{-1}: J \rightarrow I$ continue et strictement monotone.

Preuve : exercice.

Exemples: • $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \text{surjective} \\ \text{strict } \nearrow \\ \text{continue} \end{array} \right)$

Réciproque: $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \text{surjective} \\ \text{strict } \nearrow \\ \text{continue} \end{array} \right)$

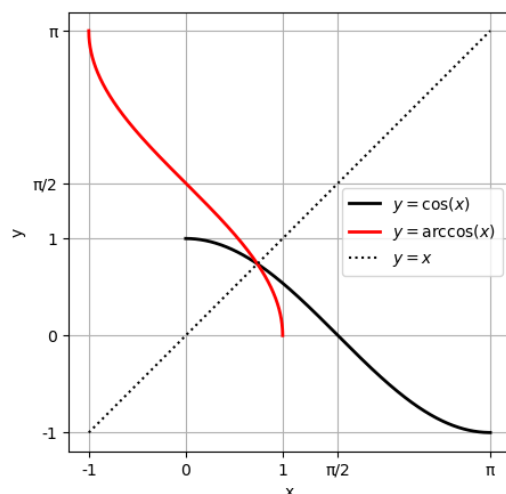
• $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto \cos(x)$

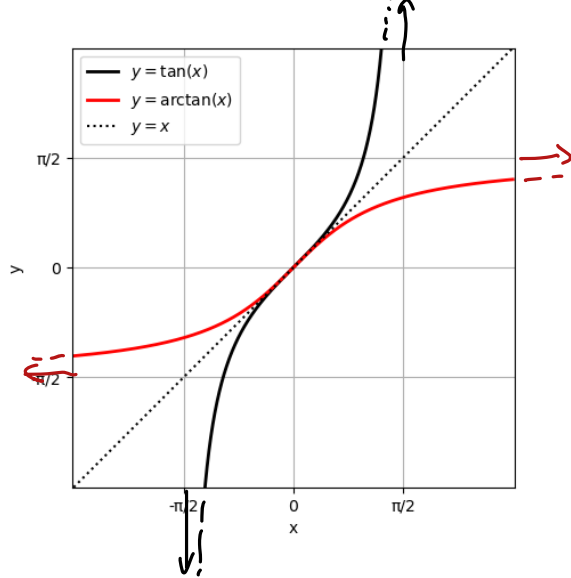
(strict. $\searrow$, surjective, continue)

Réciproque:

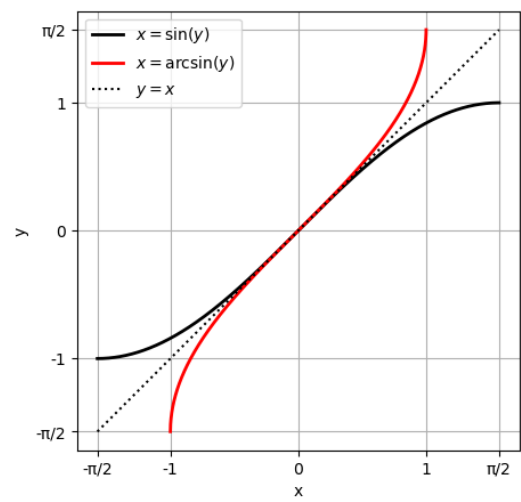
$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
 $x \mapsto \arccos(x)$

(strict. $\searrow$, surjective, continue)





$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$
 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 (strict. $\nearrow$, surjectives, continues)



$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$
 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 (strict. $\nearrow$, surjectives, continues)