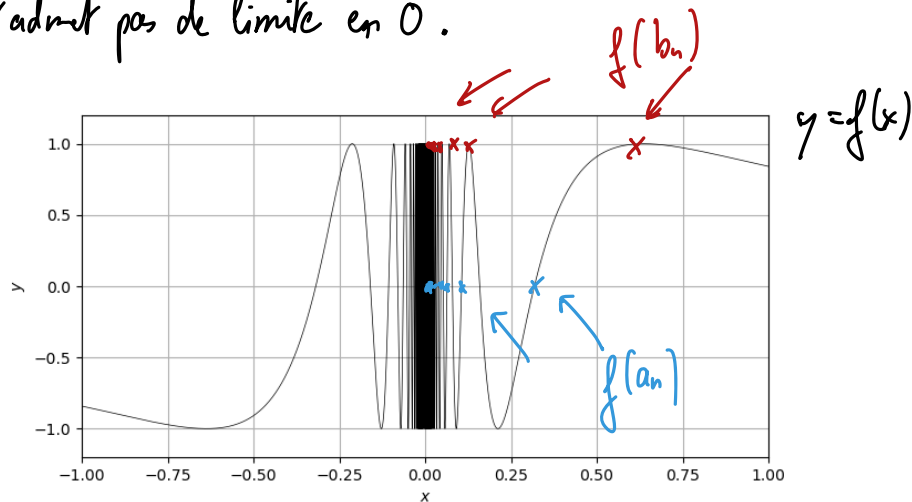


Donc f n'admet pas de limite en 0.



3.2.3 Propriétés que l'on déduit des limites de suites

Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ alors :

* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \cdot l_1 + \beta l_2$.

* $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$

* si $l_2 \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$

fin 09/10

Conservation d'ordre : si $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ on a $f(x) \leq g(x)$
alors $l_1 \leq l_2$

Thm des gendarmes / d'encadrement : Soient $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

• $\exists \delta > 0$, $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

3.2.4 limite de fonctions composées

Thm: Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ r.g. $\text{Im}(f) \subset E$ et $h = g \circ f$.

Si (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \in \mathbb{R}$

(iii) $\exists \delta > 0, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ on a $f(x) \neq y_0$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

Preuve: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $D \setminus \{x_0\}$ r.g. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

Par (i) on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y_0$.

Par (iii), $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f(a_n) \neq y_0$.

Donc par (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = l$.

Ceci montre $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

⚠ Hypothèse (iii) est importante! Contre-exemple sans (iii):

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 \quad \quad \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$. et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1 \neq \lim_{y \rightarrow 1} g(y) = 0$.

3.2.5 Limites infinies et/ou à l'infini

Def: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$, c-à-d $\exists A \in \mathbb{R}, \exists A, +\infty[\subset D$.
On dit que f admet pour limite l quand x tend vers $+\infty$
(noté $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$) ssi
 $\forall \varepsilon > 0, \exists b > A, \forall x \geq b, |f(x) - l| < \varepsilon$

(définition analogue pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$).

Def: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 ou $+\infty$ ou $-\infty$:

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, f(x) > M$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, f(x) < M$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \geq b, f(x) > M$$

Rmq: * Caractérisation à l'aide des suites possible ici aussi (exercice).

* Et donc on en déduit les règles de comparaison, règles algébriques (y compris les formes indéterminées), cf. Chap 1.

3.2.6 limite de fonctions monotones

Thm. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et définie au voisinage de $+\infty$.

$$* \text{ si } f \text{ est majorée, alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_{x \in D} f(x)$$

$$* \text{ si } f \text{ n'est pas majorée, alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Preuve:

$$* \text{ Si } f \text{ est majorée, soit } l = \sup_{x \in D} f(x). \text{ Soit } \varepsilon > 0,$$

$$\exists \alpha \in D, l - \varepsilon \leq f(\alpha) \leq l \quad (\text{caract. analytique du sup}).$$

$$f \text{ croissante, donc } \forall x \in D \cap]\alpha, +\infty[, l - \varepsilon \leq f(\alpha) \leq f(x) \leq l$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

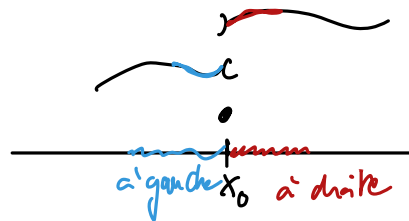
$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

$$* \text{ Si } f \text{ n'est pas majorée: Soit } M > 0. \exists \alpha \in D, f(\alpha) > M.$$

$$\text{Donc } \forall x \in D \cap]\alpha, +\infty[\text{ on a } f(x) \geq f(\alpha) > M \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3.2.7 limite à gauche ou à droite

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.



Def. On dit que f est définie à droite de x_0 ssi $\exists \delta > 0,]x_0, x_0 + \delta[\subset D$
à gauche de x_0 ssi $\exists \delta > 0,]x_0 - \delta, x_0[\subset D$.

Def. Si f définie à droite de x_0 . On dit que f admet une limite à droite en x_0 ssi : il existe $l \in \mathbb{R}$ t. q :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Alors on note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ou bien $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l$.

On dit que f tend à droite vers $+\infty$ ssi

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, (x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) > M)$$

Rmq : * Caractérisation à l'aide des suites :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in D \cap]x_0, +\infty[, \forall n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \\ \text{on a } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l \end{array} \right.$$

* d'definitions analogues pour limite à gauche, notée $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

* Si f définie au voisinage de x_0 alors, pour $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \right) \text{ (exercice).}$$

* Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et définie au voisinage de x_0 . Alors f admet une limite à droite de x_0 et une limite à gauche de x_0 et on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

(Preuve : analogue au § 3.2.6.)

3.3 Fonctions continues

3.3.1 Continuité

Def. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

→ Caractérisations équivalentes de " f est continue en x_0 ".

$$* \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

$$* \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } D \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) \right)$$

Def. f discontinue en x_0 ($\Leftrightarrow$) Non (f est continue en x_0)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0) \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ n'existe pas} \end{cases}$$

Exemple: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{continue en } 0 \\ \text{discontinue en } x, \forall x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$

Def. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie ^(à gauche) à droite de $x_0 \in D$. On dit que f est continue ^(à gauche) à droite de x_0 si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ (x \rightarrow x_0^-)}} f(x) = f(x_0)$

Def. Soit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$

- * On dit que f est continue sur $]a, b[$ ssi f est continue en $x, \forall x \in]a, b[$
- * On dit que f est continue sur $[a, b[$ ssi $\begin{cases} f \text{ est continue en } x, \forall x \in]a, b[\\ f \text{ continue à droite en } a. \end{cases}$

On note $\underbrace{f \in C^0(]a, b[)}_{\text{ensemble des fonctions continues sur }]a, b[}$ (resp. $f \in C^0([a, b[)$), etc ...

Rmq: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Avec ces définitions, on a:

$$(f \text{ continue sur } I) \Leftrightarrow \forall x_0 \in I, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ dans } I, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \right)$$

Opérations préservant la continuité:

► Règles algébriques: si f et g continues sur I alors:

* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha f, f+g, f \cdot g$ sont continues sur I
* si $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I

se déduit
des propriétés
de la limite.

► Composition: si $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ continues alors $g \circ f$ est continue sur I .

fin 14/10