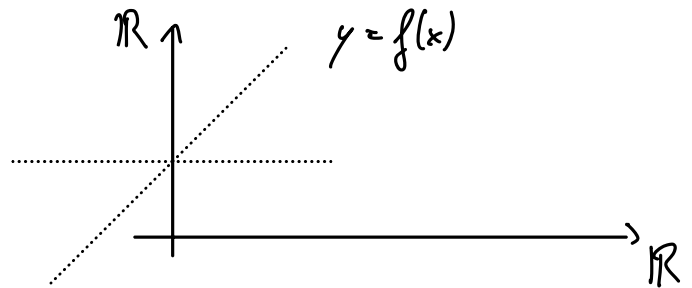


Chap. 3 : Fonctions réelles, limites, continuité

Etude de fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$ non vide.

Ex: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



* Structure héritée des réels : si $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

► Opérations : $\alpha f + \beta g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \alpha \cdot f(x) + \beta g(x), \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

► Ordre partiel : $f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \forall x \in D.$

3.1 Définitions et vocabulaire

Soit $A \subset D = \text{dom}(f)$ non-vide.

Def : * On dit que f est $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{array} \right\}$ sur A si l'ensemble $f(A)$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{majoré} \\ \text{minoré} \\ \text{borné} \end{array} \right\}$.
image de A par f.

* On définit $\begin{cases} \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) & \text{le } \underline{\text{supremum}} \text{ de } f \text{ sur } A (+\infty \text{ si } f(A) \text{ non majoré}) \\ \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) & \text{le } \underline{\text{infimum}} \text{ de } f \text{ sur } A (-\infty \text{ si } f(A) \text{ non minoré}) \end{cases}$

* S'il existe $\bar{x} \in D$ t.q. $\sup_{x \in D} f(x) = f(\bar{x})$ on dit que f atteint son maximum en $\bar{x}$, On note $\max_{x \in D} f(x) = f(\bar{x})$ et $\bar{x} \in \arg \max_{x \in D} f(x)$.
(inf) *(min)* *(arg min)*

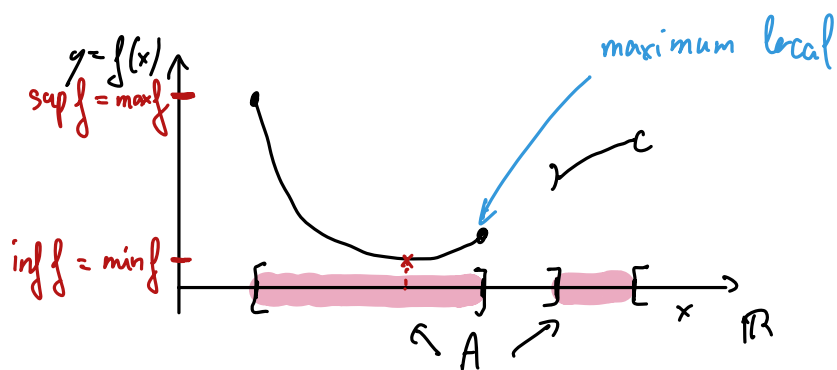
* S'il existe $x_0 \in D$ et $\delta > 0$ t.q. f restreinte à $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ atteint son maximum en x_0 , on dit que f admet un maximum local en x_0 .

(minimum)

(minimum)

fin 02/10

* Un extremum (local) en $x = x_0$ est minimum (local) ou un maximum (local)

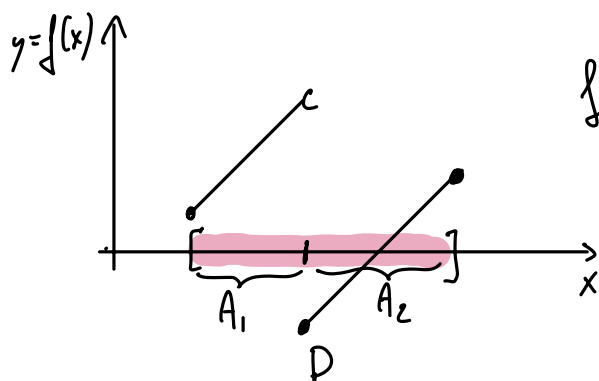


$(f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, A \subset D)$

Def: * f est dite croissante sur A si $\forall x_1, x_2 \in A, (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
(décroissante) ($\geq$)

* f est dite strictement croissante sur A si $\forall x_1, x_2 \in A, (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
(strictement décroissante) ($>$)

* f est dite (strictement) monotone si elle est soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante.



f croissante sur A_1 et sur A_2
mais pas croissante sur $D = A_1 \cup A_2$.

Def: Si D est symétrique par rapport à 0 (c-à-d $\forall x \in D, -x \in D$)
alors pour $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on dit que :

* f est paire si $\forall x \in D, f(x) = f(-x)$

* f est impaire si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$

Prop: Si D est symétrique par rapport à 0, toute fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Preuve: En effet si $f = f_i + f_p$ est une telle décomposition alors $\forall x \in D$

$$\begin{cases} f(x) = f_p(x) + f_i(x) \\ f(-x) = f_p(-x) + f_i(-x) = f_p(x) - f_i(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad (\text{partie paire}) \\ f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (\text{partie impaire}) \end{cases}$$

les fonctions ainsi définies sont bien paire/impair; cela démontre l'existence et l'unicité de la décomposition. ■

Def: Si $D = \mathbb{R}$, on dit que f est périodique s'il existe $P \in \mathbb{R}^* \text{ t. q.}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+P) = f(x).$$

Dans ce cas, P est appelé une période de f .

On vérifie, par récurrence, qu'alors nP est aussi une période $\forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

Ex: L'ensemble des périodes de $* f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$ est $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}$

$$* g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases} \text{ est l'ensemble } \mathbb{Q}^*$$

Def: * Partie positive: $f^+: D \rightarrow \mathbb{R}$, partie négative: $f^-: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{cases} x \mapsto \max\{0, f(x)\} \\ x \mapsto \max\{0, -f(x)\} \\ = -\min\{0, f(x)\} \end{cases}$

$$\text{On a : } f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

3.2 limites de fonctions réelles.

3.2.1 Définitions

Soit $f: D^{\subset \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$

Def: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit f est définie au voisinage de x_0 s'il existe $\delta > 0$, $\exists x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset (D \cup \{x_0\})$

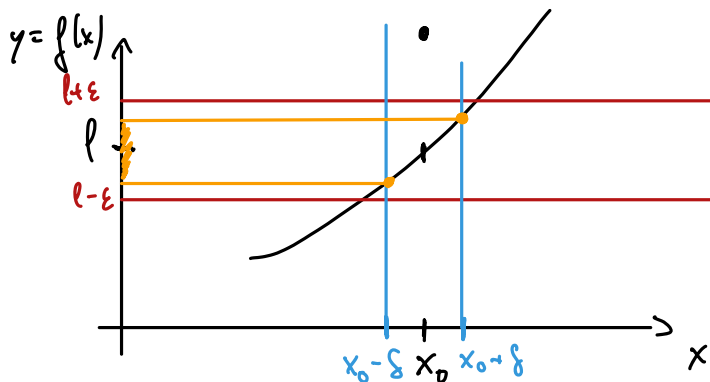
$$\Leftrightarrow \exists x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \subset D$$

Ex: • $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie au voisinage de 0
car $\forall \delta > 0$, $]-\delta, \delta[\subset \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$

• $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ définie au voisinage d'aucun point (par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Def: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite l en x_0 (noté $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$)

ssi: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in D$, $(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$



$$f(\text{blue}) = \text{orange} \subset \text{red} \quad \checkmark$$

⚠ Si f est définie en x_0 , on peut avoir $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
(on parle aussi de "limite épointée").

3.2.2 Caractérisation à l'aide de suites

Thm: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0 et $l \in \mathbb{R}$. Alors:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \begin{cases} \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite d'éléments de } D \setminus \{x_0\} \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \\ \text{on a } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l \end{cases}$$

Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $D \setminus \{x_0\}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in D$, $(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $0 < |a_n - x_0| < \delta$.

Ainsi on a $\forall n \geq N$, $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons la contraposée ($\text{non}(A) \Rightarrow \text{non}(B)$).

Supposons $\text{non}(A)$: $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x \in D$ t.q. $0 < |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

En prenant $\delta_n = \frac{1}{n}$, ceci implique l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q.:

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a donc: $x_n \in D \setminus \{x_0\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ et $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l . On a donc montré $\text{non}(B)$. ■

Rmq: * Par unicité de la limite d'une suite, la limite d'une fonction est unique.

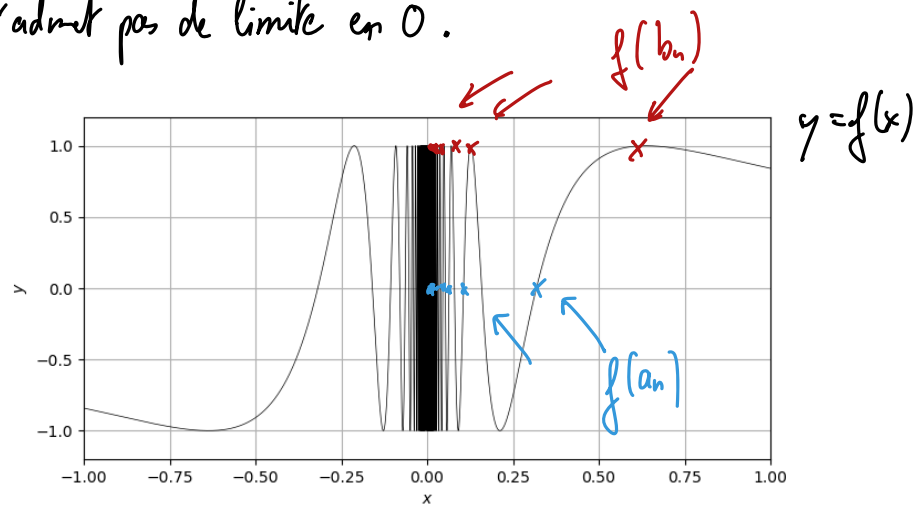
* Pour montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas, on peut construire 2 suites (a_n) et (b_n) dans $D \setminus \{x_0\}$ convergeant vers x_0 et t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$

Ex: $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x}) \end{cases}$. Limite en 0?

• On pose $a_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0$

• On pose $b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$

Donc f n'admet pas de limite en 0.



3.2.3 Propriétés que l'on déduit des limites de suites

Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ alors :

* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \cdot l_1 + \beta l_2$.

* $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$

* si $l_2 \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$

fin 09/10