Donc (x_n) ne converge pas vers 0, et donc la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ diverge ■

correction

Exemple : Considérons $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$?

- Règle de d'Alembert : $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, donc ne s'applique pas.
- Règle de Cauchy : $\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor / n} \to \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = L < 1$ utilise la continuité de exp.

donc la série converge absolument.

fin 02/10

Rmq : • On peut montrer que pour toute suite (u_n) dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$ (exercice).

• La règle de Cauchy est plus fine que d'Alembert (mais parfois d'Alembert est plus facile à appliquer).

Thm (critère des séries alternées). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Si :

- $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (signe alterné).
- $|x_{n+1}| \leq |x_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

ou ceci vrai à partir d'un certain rang.

$\Rightarrow$ $(-1)^n x_n$ de signe constant (suffit)

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge.

Preuve : Montrons que $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy, c'est-à-dire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |S_{n+m} - S_{n-1}| = |x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m}| < \varepsilon.$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Si $x_n \geq 0$:

$$0 \leq \underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + \underbrace{x_{n+2} + \dots}_{\geq 0} + \underbrace{x_{n+m-1} + x_{n+m}}_{\geq 0} \leq x_n \quad \text{si } m \text{ pair}$$

(avec $x_{n+1} + x_{n+2} \leq 0$, …, $x_{n+m-1} + x_{n+m} \leq 0$)

$$0 \leq \underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + \underbrace{x_{n+2} + \dots}_{\geq 0} + \underbrace{x_{n+m-1}}_{\geq 0} + x_{n+m} \leq x_n \quad \text{si } m \text{ impair}$$

(avec $x_{n+1} + x_{n+2} \leq 0$, …, ≤ 0, $x_{n+m} \leq$)

De la même façon on montre que si $x_n \leqslant 0$ on a :

$$x_n \leqslant x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m} \leqslant 0$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, $|S_{n+m} - S_{n-1}| \leqslant |x_n|$

Comme $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ on a que (S_n) est de Cauchy donc converge.

Ex : Par ce critère, la série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

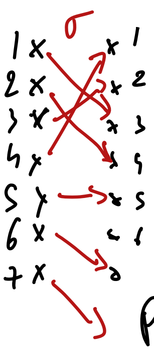
2.3 Permutation des termes d'une série

Thm : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ une série absolument convergente et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijection.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$

Lem : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ une série à termes $\geqslant 0$ et convergente et soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$

Preuve du lemme : Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}$ et $S = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$.



On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant S_{\max\{\sigma(i)\,;\, i \in \{0,\dots,n\}\}} \leqslant S$

contient tous les termes de T_n, et d'autres potentiellement.

Donc (T_n) est $\nearrow$, majorée donc converge, et $T := \lim_{n\to\infty} T_n \leqslant S$

Par ailleurs : $\forall m \in \mathbb{N}$, $S_m \leqslant T_{\max\{\sigma^{-1}(j)\,;\, j \in \{0,\dots,m\}\}} \leqslant T$

Donc en passant à la limite, $S \leqslant T$ et ainsi $S = T$ ∎

Preuve du Thm : Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\begin{cases} x^+ = \max\{0, x\} = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ x^- = \max\{0, -x\} = -\min\{0, x\} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x^+, x^- \leqslant |x|$.

Par comparaison avec $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$, les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^+$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^-$ convergent.

Il s'ensuit, en utilisant que $x = x^+ - x^-$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme de suites} \\ \text{convergentes}}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^+ - \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^- \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemme (2 fois)}}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)}^+ - \sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)}^- \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme de suites} \\ \text{convergentes.}}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)} \qquad \blacksquare$$

Def : Si $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ diverge, on dit que $\sum x_k$ est <u>semi-convergente</u>.

<u>Thm (réarrangement de Riemann)</u>. Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ une série réelle <u>semi-convergente</u> et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijection t.q $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(k)} = \alpha$.

<u>N.B</u> : on peut aussi choisir $\alpha = \pm\infty$.

<u>Ex</u> : <u>Série harmonique alternée</u> $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge (vers $\log(2)$ cf. plus tard) et est semi-convergence.

On a

$$1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{<-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}_{<-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} - \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14}}_{<-\frac{1}{4}} + \frac{1}{7} - \underbrace{\dots}_{<-\frac{1}{4}} = -\infty.$$

en utilisant $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k} \geq n \cdot \frac{1}{4n-2} \geq \frac{1}{4}$

<u>Idée de preuve du Thm (informel)</u> :

* Soit $(p_k)_{k\geq 0}$ (resp. $(n_k)_{k\geq 0}$) la sous-suite des termes ≥ 0 (resp. < 0) de la suite $(x_k)_{k\geq 0}$.

* On a : . $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$ et $\lim_{k\to\infty} n_k = 0$

. $\sum_{k\geq 0} p_k = +\infty$ et $\sum_{k\geq 0} n_k = -\infty$

(En effet : . si $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{\infty} x_k - \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} n_k$ converge.

. et donc $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| = \sum_{k=0}^{\infty} p_k - \sum_{k=0}^{\infty} n_k$ converge : contradiction!)

* Soit $P_1 = \min \{ P \in \mathbb{N} \ ; \ \sum_{k=0}^{P} p_k > \alpha \}$ (existe car $\sum p_k = +\infty$)

* Soit $N_1 = \min \{ N \in \mathbb{N} \ ; \ \sum_{k=0}^{P_1} p_k + \sum_{k=0}^{N} n_k < \alpha \}$ (existe car $\sum n_k = -\infty$)

* Soit $P_2 = \min \{ P \in \mathbb{N} \ ; \ \sum_{k=0}^{P_1} p_k + \sum_{k=0}^{N_1} n_k + \sum_{k=P_1+1}^{P} p_k > \alpha \}$ ...

⋮

* À l'étape i, la somme ainsi construite diffère de α d'au plus p_{P_i} ou n_{N_i}

* Comme $\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} n_k = 0$, ces sommes convergent vers α.

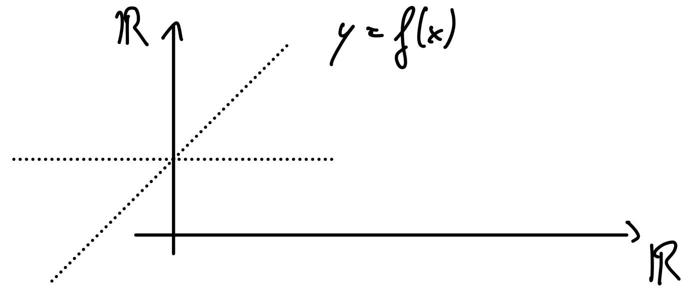
→ On a ainsi défini (implicitement) une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

t.q $\sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)} = \alpha$. ∎

Chap. 3 : Fonctions réelles, limites, continuité

Etude de fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$ non vide.

Ex: $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x+1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{vmatrix}$



* Structure héritée des réels : si $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   - Opérations : $\alpha f + \beta g : \begin{vmatrix} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha \cdot f(x) + \beta g(x) \end{vmatrix}$, $f \cdot g : \begin{vmatrix} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{vmatrix}$

   - Ordre partiel : $f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \forall x \in D$.

3.1 Définitions et vocabulaire

Soit $A \subset D = \mathrm{dom}(f)$ non-vide.

image de A par f.

Def : * On dit que f est $\begin{Bmatrix} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{Bmatrix}$ sur A si l'ensemble $f(A)$ est $\begin{Bmatrix} \text{majoré} \\ \text{minoré} \\ \text{borné} \end{Bmatrix}$.

* On définit $\begin{cases} \sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup f(A) \text{ le supremum de } f \text{ sur } A \; (+\infty \text{ si } f(A) \text{ non majoré}) \\ \inf\limits_{x \in A} f(x) = \inf f(A) \text{ l'infimum de } f \text{ sur } A \; (-\infty \text{ si } f(A) \text{ non minoré}) \end{cases}$

* S'il existe $\bar{x} \in D$ t.q $\underset{x \in D}{\overset{(\inf)}{\sup}} f(x) = f(\bar{x})$ on dit que f atteint son maximum (minimum) en $\bar{x}$, On note $\max\limits_{x \in D} f(x) = f(\bar{x})$ (min) et $\bar{x} \in \operatorname{argmax}\limits_{x \in D} f(x)$ (argmin).

* S'il existe $x_0 \in D$ et $\delta > 0$ t.q f restreinte à $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ atteint son maximum en x_0, on dit que x_0 est un maximum local