Chapitre 2 : Séries réelles

Donner un sens aux sommes infinies (dénombrables) de réels.

2.1 Définitions

Def (série). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On dit que S_n est la $(n+1)^{\text{ème}}$ somme partielle de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Def (convergence).

- Si (S_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, on dit que la série converge et note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = l$.
- Si (S_n) diverge, on dit que la série diverge. Si $\lim S_n = +\infty$ on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$

  ——— $-\infty$ ——— $= -\infty$.

Rmq : changer un nb fini de termes d'une série ne change pas sa convergence (mais peut changer la valeur de la somme).

Def (convergence absolue).

Si $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge, on dit que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge absolument.

Thm. Si une série converge absolument, alors elle converge.
(On dit que : la convergence absolue est une condition suffisante de convergence)

Preuve : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que la suite $A_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ converge.
et soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $m > n$, on a

car (A_n) croissante

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| = A_m - A_n = |A_m - A_n|$$

Comme (A_n) converge, elle est de Cauchy donc (S_n) est de Cauchy, donc (S_n) converge ∎

Thm. Si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est une série convergente alors $\lim_{+\infty} u_n = 0$

(c'est une condition nécessaire de convergence)

Preuve. Supposons que la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ converge. Alors elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \geq N$, $|S_m - S_n| < \varepsilon$

En particulier $\forall n \geq N+1$, $|S_n - S_{n-1}| = |u_n| < \varepsilon$.

Donc $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ ∎

⚠ La réciproque n'est pas vraie. Par exemple :

Proposition : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (la série harmonique diverge).

$S_1 = 1$
$S_2 \geq 1 + \frac{1}{2}$
$S_4 \geq S_2 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{2}{2}$, etc

Preuve: Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ et donc $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ (récurrence immédiate).

Donc la suite des sommes partielles est non majorée. Comme par ailleurs (S_n) est croissante, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. ∎

2.2 Critères de convergence

Tous les critères hérités des suites s'appliquent, par exemple:

Thm. Soient deux séries $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ t.q $0 \leq u_k \leq v_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

- Si $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge → croissante et majorée
- Si $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ diverge alors $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ diverge (vers $+\infty$) → croissante et non majorée.

Exemple : $\boxed{\text{Pour } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ la série de Riemann } \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1.}$

<u>Preuve :</u> • Si $\alpha \leq 1$, la série diverge par comparaison avec la série harmonique car $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

• Soit $\alpha > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

$$S_n \leq S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^\alpha}$$

$$\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} S_n$$

Donc $\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)}_{\substack{>0 \\ (\text{car } \alpha > 1)}} S_n \leq 1$ donc $S_n \leq \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}$

Ainsi (S_n) est majorée. Comme (S_n) est aussi croissante, elle converge $\blacksquare$

Valeur de la somme ? Délicat... Par ex : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (cf : 3blue1brown sur youtube "Pb de Bâle")

Thm (règle de D'Alembert, pour les séries). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^*$ telle que : $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \rho$. Alors :

(i) si $\rho < 1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge absolument.

(ii) si $\rho > 1$ (ou $\rho = +\infty$), la diverge diverge.

<u>Preuve :</u> (i) Supposons $\rho < 1$. Alors $\exists m \in \mathbb{N}$, t.q $\forall k \geq m$, $\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| < \frac{\rho+1}{2} < 1$

Donc $\forall n \geq m$, $|x_n| = \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x_{m+1}}{x_m}\right| \cdot |x_m| \leq \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-m} \cdot |x_m|$

Ainsi $\forall n > m$, $\sum_{k=0}^{n} |x_k| = \sum_{k=0}^{m} |x_k| + \sum_{k=m+1}^{n} |x_k|$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} |x_k| + |x_m| \cdot \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{k-m}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} |x_k| + \frac{2|x_m|}{1-\rho} \quad : \text{borne indépendante de } n!$$

$$\left(\text{car } \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{k-m} \leqslant \underbrace{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}_{\leqslant 1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} \leqslant \frac{2}{1-\rho}\right)$$

Ainsi $A_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k|$ est bornée. Or (A_n) est croissante donc converge.
On a donc $\sum_{k=0} x_k$ converge absolument.

(ii) Si $\rho > 1$ alors on sait déjà que $\lim_{n \to +\infty} |x_n| = +\infty$ donc la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ diverge. ∎

Thm (Règle de Cauchy / de la racine n-ième). Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle

soit $L = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$. Alors :

(i) si $L < 1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge absolument.
(ii) si $L > 1$ (ou $L = +\infty$), la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ diverge.

Preuve : (i) Si $L < 1$. Alors $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall k \geqslant m$, $\sqrt[k]{|x_k|} \leqslant \frac{1+L}{2} < 1$.

Donc $\forall n \geqslant m$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| = \sum_{k=0}^{m} |x_k| + \sum_{k=m+1}^{n} |x_k|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} |x_k| + \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1+L}{2}\right)^{k}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} |x_k| + \frac{2}{1-L} \quad : \text{borne indépendante de } n!$$

On conclut, comme dans le thm précédent, que $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge absolument.
(ii) Si $L > 1$ (ou $L = +\infty$) alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant m$, $\sqrt[n]{|x_n|} \geqslant 1 \Rightarrow |x_n| \geqslant 1$.

Donc (x_n) ne converge pas vers 0, et donc la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ diverge ■

correction

<u>Exemple</u>: Considérons $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$?

- <u>Règle de d'Alembert</u> : $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, donc ne s'applique pas.
- <u>Règle de Cauchy</u> : $\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor / n} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = L < 1$

utilise la continuité de exp.

donc la série converge absolument.

fin 02/10