

Notons $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ et $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. On veut montrer que $y = x$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, on a :

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $y_N = \sup\{x_k; k \geq N\}$, $\exists k \geq N$ t.q. $|x_k - y_N| < \frac{\varepsilon}{3}$

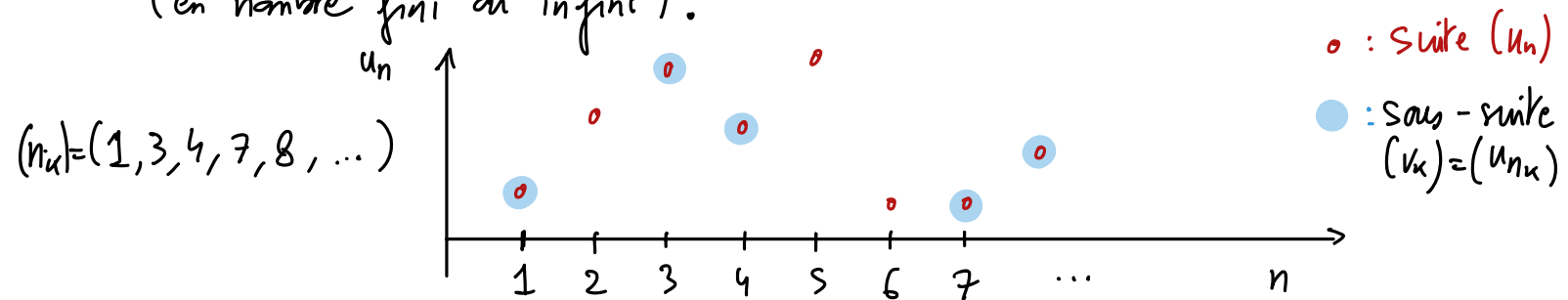
Ainsi

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x - x_k + x_k - y_N + y_N - y| \\ &\leq |x - x_k| + |x_k - y_N| + |y_N - y| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $x = y$. On montre de même que $x = z$ et donc $y = z$ ♣

1.5 Sous-suites

Prendre une sous-suite consiste à supprimer certains termes d'une ^{suite} donnée (en nombre fini ou infini).



Def : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite et $(n_k)_{k \geq 0}$ une ^{suite "extractrice"} suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$.
On appelle $(v_k)_{k \geq 0} = (u_{n_k})_{k \geq 0}$ une sous-suite de (u_n)
ou "suite extraite".

fin 25/09

Rédaction :

- qqs conseils dans le corrigé de la série 3.2
- voir aussi le document partagé par Guillaume sur le forum -
- demandez aux assistants de commenter votre rédaction -
- exercice à rendre dans la série 4.2 (puis 1 par semaine environ).

Prop. Si $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors toute sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ tend vers l . (exercice)

Thm (Bolzano-Weierstrass, 1874). De toute suite réelle bornée, on peut extraire (au moins) une sous-suite convergente.

Preuve: Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. Construisons $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ une sous-suite convergente, par récurrence :

On pose $n_0 = 0$.

Si n_{k-1} est défini, on choisit $n_k > n_{k-1}$ t.q. $x_{n_k} \geq \sup \{x_n; n > n_{k-1}\} - \frac{1}{k}$.

Un tel choix est possible (propriétés du sup).

Alors $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ converge vers $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sup \{x_k; k \geq n\}}_{y_n} =: y$

En effet: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \geq 1$ tel que $\begin{cases} \frac{1}{N} \leq \varepsilon \\ \sup \{x_k; k \geq N\} \leq y + \varepsilon \end{cases}$

$\forall k \geq N$, on obtient :

$$\begin{cases} x_{n_k} \geq \sup \{x_n; n > n_{k-1}\} - \frac{1}{k} \geq y - \frac{1}{N} \geq y - \varepsilon \\ x_{n_k} \leq \sup \{x_n; n \geq N\} \leq y + \varepsilon \end{cases} \quad \hookrightarrow \text{car } n_k \geq N \text{ (en effet } n_k \geq k \text{)}$$

Ainsi $\forall k \geq N$, $|x_{n_k} - y| \leq \varepsilon$. ■

Def: Si (u_n) admet une sous-suite qui converge vers l , on dit que l est un point d'accumulation de la suite.
ou valeur d'adhérence

Rmq: • Toute suite bornée admet au moins un point d'accumulation (par B.W)
• En particulier la $\limsup$ (resp. $\liminf$) est le plus grand (resp. le plus

petit) point d'accumulation.

Corollaire: Soit (u_n) une suite bornée t. q toutes les sous-suites convergentes ont la même limite $l \in \mathbb{R}$. Alors $\lim u_n = l$.

Preuve: Si (u_n) converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ (déjà vu).

Par l'absurde, supposons (u_n) diverge.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ t. q $\forall k \in \mathbb{N}, |u_{n_k} - l| > \varepsilon$. (*)
 (u_{n_k}) est bornée donc par B.W. il existe une sous-suite $(u_{n_{k_i}})_{i \geq 0}$ de $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge. Or $(u_{n_{k_i}})_{i \geq 0}$ est aussi une sous-suite de (u_n) donc cvge vers l , ce qui contredit (*). Ainsi, (u_n) converge. ▀

1.6 Suites de Cauchy

Déf: On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |u_m - u_n| < \varepsilon$$

→ En particulier, $\{u_n; n \geq N\} \subset]u_N - \varepsilon, u_N + \varepsilon[$

Thm (de Cauchy): Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ converge ssi elle est de Cauchy.

- Un ensemble muni d'une distance dans lequel ce Thm est vrai est dit "complet".
→ Le Thm dit donc " $\mathbb{R}$ est complet".

- $\mathbb{Q}$ n'est pas complet :

$u_0 = 3$, $u_1 = 3,1$, $u_2 = 3,14$, $u_3 = 3,141$ (approximation de π ...)
est de Cauchy, a valeurs dans $\mathbb{Q}$, mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

- Une construction possible de $\mathbb{R}$ consiste à ajouter à $\mathbb{Q}$ toutes les limites de suites de Cauchy : on appelle cela la complétion de $\mathbb{Q}$.

Preuve : • $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Si } m, n \geq N, |u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

• $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $(u_n)_{n \geq 0}$ de Cauchy.

- Remarquons d'abord que (u_n) est bornée. En effet, en posant $\varepsilon = 1$,
 $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_0, |u_m - u_n| < 1$ ($\Rightarrow |u_m| \leq |u_m - u_n| + |u_n| < 1 + |u_n|$)
 donc $|u_m| < |u_{N_0}| + 1, \forall m \geq N_0$.

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \max \{ |u_{N_0}| + 1, |u_0|, \dots, |u_{N_0-1}| \}.$$

donc (u_n) est bornée.

- Par Bolzano - Weierstrass, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\bullet \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bullet \text{ Soit } k \in \mathbb{N}, \forall n_k \geq N \text{ et } |u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors $\forall n \geq N$,

$$|u_n - l| = |u_n - u_{n_k} + u_{n_k} - l| \leq |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Exemple : $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \forall n \geq 2$ et $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

Montrez que (x_n) est de Cauchy et calculer sa limite.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = \frac{5}{8}, \quad \dots$$

$$\text{On a } x_n - x_{n-1} = \frac{-1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \dots = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \quad (\text{par récurrence immédiate})$$

Soit $p > q \geq 1$: on a

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &\leq |x_p - x_{p-1}| + \dots + |x_{q+1} - x_q| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^q = \left(\frac{1}{2}\right)^q \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &\leq \frac{1}{2^{q-1}} \leq \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Donc, en prenant $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ on a :

$$\forall p, q \geq N, \quad |x_p - x_q| \leq \max\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right\} < \varepsilon$$

Donc (x_n) est de Cauchy, donc $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

• L'équation de point fixe donne : $l = \frac{1}{2}(l+l) = l \rightarrow$ ne nous aide pas.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ On a } x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

forme explicite
pour x_n !

fin 30/09.