

- (i) Supposons (u_n) majorée. Soit $\alpha = \sup \{ u_n ; n \in \mathbb{N} \}$, et soit $\varepsilon > 0$.
 Par la caractérisation analytique du sup: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $0 \leq \alpha - u_{n_0} \leq \varepsilon$
 Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq n_0$, $0 \leq \alpha - u_n \leq \alpha - u_{n_0} \leq \varepsilon$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$
- (ii) Supposons (u_n) non majorée. Soit $A > 0$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} \geq A$.
 Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} \geq A$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

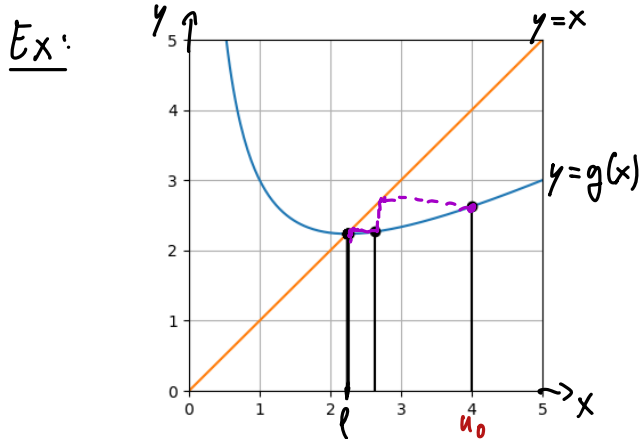
Point méthode (suites définies par récurrence): Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
 avec $g: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$

Q] Étudier la convergence de (u_n) ?

o) Vérifier que (u_n) est bien définie (c-à-d que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$)

1) Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et g est continue en l alors $l = g(l)$
 $\rightarrow$ permet d'isoler les candidats pour l .

2/ Calculer quelques termes et/ou faire un graphique.



$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \text{ avec } g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x} \right)$$

$$l = g(l) \Leftrightarrow l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{5}{l} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} l = \frac{5}{2l} \Leftrightarrow l^2 = 5$$

3/ Essayer de montrer que (u_n) est $\begin{cases} \text{croissante et majorée} \\ \text{ou} \\ \text{décroissante et minorée} \end{cases}$ (se servir du l candidat).

4/ Conclusion.

Thm (critère de D'Alembert). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite t.q. $\begin{cases} u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho \in \mathbb{R} \end{cases}$

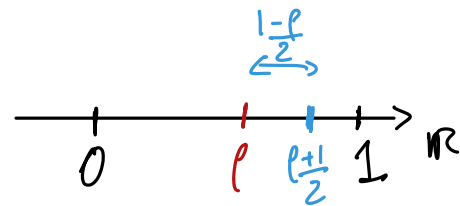
Alors:

- Si $\rho < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
- Si $\rho > 1$ alors (u_n) diverge

Rmq: si $\rho = 1$, on ne pas conclure en général, par ex: $\begin{cases} u_n = n \\ \text{versus} \\ v_n = \frac{1}{n+1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

Preuve: 1) Supposons $\rho < 1$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, \left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - \rho \right| \leq \frac{1-\rho}{2}$$



$$\text{et donc } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{\rho+1}{2} < 1$$

$$\forall n \geq m, 0 \leq |u_n| = \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{u_{m+1}}{u_m} \right| \cdot |u_m|$$

$$\leq \underbrace{\left(\frac{\rho+1}{2} \right)^{n-m}}_{(y_n)_{n \geq m}} \cdot |u_m|$$

Comme (y_n) suite géométrique tend vers 0, on en conclut par encadrement que $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
et donc $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2) Supposons $\rho > 1$. De manière analogue on montre que

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, |u_n| \geq \underbrace{\left(\frac{\rho+1}{2} \right)^{n-k}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty} \cdot \underbrace{|u_k|}_{\neq 0}$$

$\text{car } \frac{\rho+1}{2} > 1$

Donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ donc (u_n) non bornée
donc (u_n) diverge. ■

Ex: $u_n = \frac{\alpha^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{On a } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha^n} \right| = \frac{|\alpha|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 (= \rho)$$

Donc par le critère de D'Alembert, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (car $\rho = 0 < 1$)

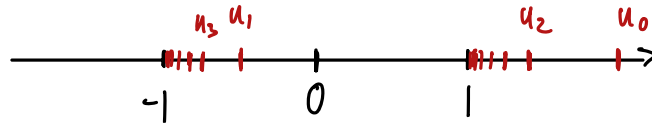
1.4 limite supérieure et inférieure

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée

Pour $n \geq 0$, posons $y_n = \sup \{ u_k ; k \geq n \} = \sup \{ u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots \}$
 $(y_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée donc elle converge.

Def: On dit que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ est la limite supérieure de $(u_n)_{n \geq 0}$ notée $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$.
De même, on note $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{ u_k ; k \geq n \}$, appelée la limite inférieure.

Ex: (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.



$$\begin{aligned} \text{Alors } y_n &= \sup \{ u_k ; k \geq n \} = \sup \left\{ (-1)^k + \frac{1}{k+1} ; k \geq n \text{ et } k \text{ pair} \right\} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 + \frac{1}{n+2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1.$$

Thm: Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée. Alors :

$$(x_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Preuve: $\Leftarrow$ Supposons $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ et posons $\begin{cases} y_n = \sup \{ x_k ; k \geq n \} \\ z_n = \inf \{ x_k ; k \geq n \} \end{cases}$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \leq x_n \leq y_n$

Donc par le thm. d'encadrement, on a (x_n) converge (vers l).

$\Rightarrow$ Supposons que (x_n) converge vers $x \in \mathbb{R}$ et posons $\begin{cases} y_n = \sup \{ x_k ; k \geq n \} \\ z_n = \inf \{ x_k ; k \geq n \} \end{cases}$

Notons $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ et $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. On veut montrer que $y = x$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, on a :

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $y_N = \sup\{x_k; k \geq N\}$, $\exists k \geq N$ t.q. $|x_k - y_N| < \frac{\varepsilon}{3}$

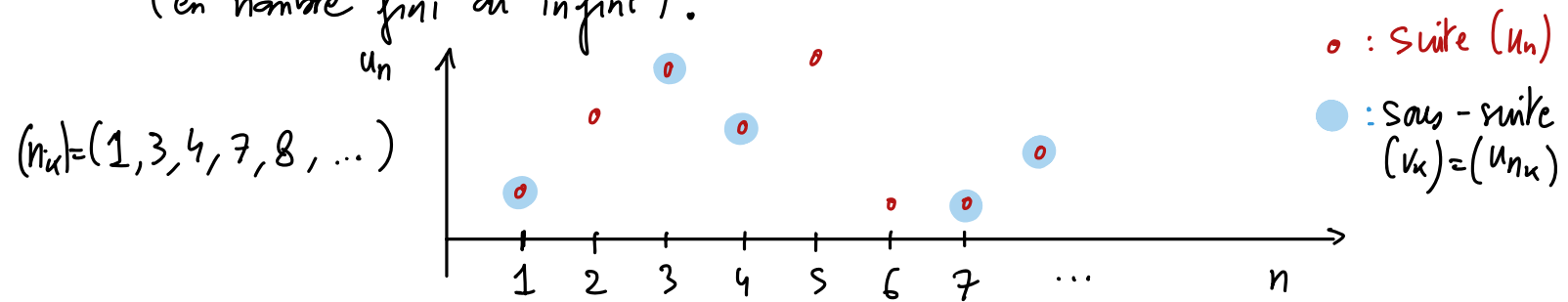
Ainsi

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x - x_k + x_k - y_N + y_N - y| \\ &\leq |x - x_k| + |x_k - y_N| + |y_N - y| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $x = y$. On montre de même que $x = z$ et donc $y = z$ ♣

1.5 Sous-suites

Prendre une sous-suite consiste à supprimer certains termes d'une ^{suite} donnée (en nombre fini ou infini).



Def : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite et $(n_k)_{k \geq 0}$ ^{← suite "extractrice"} une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$.
On appelle $(v_k)_{k \geq 0} = (u_{n_k})_{k \geq 0}$ une sous-suite de (u_n) ou "suite extraite".

fin 25/09