Prop :
1) (u_n) converge $\Rightarrow$ (u_n) bornée
2) $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Rightarrow (u_n)$ minorée
3) $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Rightarrow (u_n)$ majorée

(preuve en exercice).

fin cours 18/09

Propriétés d'ordre des limites :

Prop : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles t.q $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$.

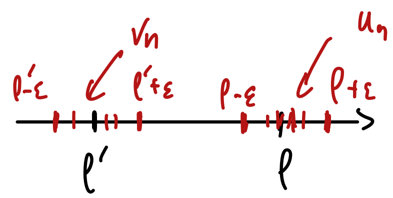
Si $\underbrace{\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N_0 \Rightarrow u_n \leq v_n)}_{(H)}$ alors $l \leq l'$.

"Les inégalités larges passent à la limite"

⚠ Les inégalités strictes ne sont pas préservées !

Ex : $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{-1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ alors
- $v_n < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Preuve : Par l'absurde, supposons $l' < l$.
Soit $\varepsilon = \frac{l-l'}{4} \in \mathbb{R}_+^*$. Donc



$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq N_0$ t.q $|u_{n_1} - l| < \varepsilon$ et $|v_{n_1} - l'| < \varepsilon$

Donc $v_{n_1} \leq l' + \varepsilon < l - \varepsilon \leq u_{n_1}$: cela contredit (H).

On a donc $l \leq l'$ ∎

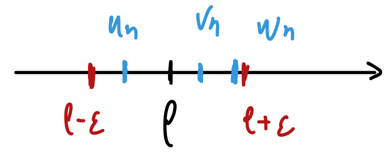
Thm. des gendarmes / d'encadrement : Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles t.q :
(i) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n)$
(ii) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{n\to\infty} v_n = l$.

Rmq : • le fait que (v_n) converge fait partie de la conclusion.
• De manière analogue on a $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n) \\ \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Par (ii), $\exists\, N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \\ n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon \end{cases}$$



Posons $N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}$. $\forall n \geq N_0$ on a :

$$-\varepsilon < u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell < \varepsilon \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon. \blacksquare$$

Propriétés algébriques des limites

Prop : Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles t.q $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}$

Alors :

(i) $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |\ell|$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} (\alpha u_n) = \alpha \cdot \ell$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$

(iv) $\lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \ell \cdot \ell'$

(v) si $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\boxed{\ell \neq 0}$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

(i) utiliser $\big||u_n| - |\ell|\big| \leq |u_n - \ell|$ (inégalité triangle inverse)

(ii) (Exercice)

(iii) Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ on a $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall n \geq N$, $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$

(iv) Faisons ensemble l'analyse : sachant $|u_n - \ell| < \varepsilon_1$ et $|v_n - \ell'| < \varepsilon_2$ on peut les choisir

comment avoir $I = |u_n \cdot v_n - \ell \cdot \ell'| < \varepsilon$?

$$\begin{aligned} I &= |u_n \cdot v_n - u_n \cdot \ell' + u_n \cdot \ell' - \ell \cdot \ell'| \\ &= |u_n (v_n - \ell') + \ell' \cdot (u_n - \ell)| \\ &\leq |u_n| \cdot |v_n - \ell'| + |\ell'| \cdot |u_n - \ell| \end{aligned}$$

Il faut donc ↗ majorer $|u_n|$ et $|\ell'|$
↘ majorer $|v_n - \ell'|$ et $|u_n - \ell|$.

Synthèse : Soit $\varepsilon > 0$. (u_n) converge donc (u_n) est bornée donc

$\exists C > 0$ t.q $|u_n| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $|\ell'| \leq C$

$\exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2C}$ et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2C}$

Alors $\forall n \geq N$,

$$|u_n \cdot v_n - \ell \cdot \ell'| \leq |u_n| \cdot |v_n - \ell'| + |\ell'| \cdot |u_n - \ell|$$
$$\leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon.$$

(v) Analyse : Comment avoir $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$?

On a $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|\ell| \cdot |u_n|}$: il faut ↗ majorer $|\ell - u_n|$ ↘ minorer $|u_n|$ par qqch > 0.

Synthèse :

- $\exists N_1$ tq $\forall n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$ donc $|\ell| \leq |\ell - u_n| + |u_n| < \frac{|\ell|}{2} + |u_n|$

Donc $\forall n \geq N_1$, $|u_n| > \frac{|\ell|}{2}$.

- Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N_2 \geq N_1$ t.q $|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|^2 \cdot \varepsilon}{2}$, $\forall n \geq N_2$.

Pour $n \geq N_2$, on a : $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|\ell| \cdot |u_n|} < \frac{|\ell - u_n|}{|\ell|^2/2} \leq \varepsilon$ ∎

Corollaire : • pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \ell + \beta \ell'$ (par (ii) et (iii))

• si $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\ell' \neq 0$ alors $\lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$ (par (iv) et (v))

Application : limite de quotients de polynômes en n :

Ex : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^3 - 4}{4n^3 + 2n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 - 4/n^3}{4 + 2/n}$ i) Factoriser par + haut degré

$= \frac{2 - 4 \lim 1/n^3}{4 + 2 \lim (1/n)}$ (ii) utiliser les règles algébriques

$= \frac{2 - 4 \cdot 0}{4 + 2 \cdot 0} = \frac{1}{2}$ (iii) conclure.

De manière générale, pour $p, q \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}$, $b_0, \dots, b_q \in \mathbb{R}$ t.q. $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p < q \\ +\infty & \text{si } p > q \text{ et } a_p \cdot b_q > 0 \\ -\infty & \text{si } p > q \text{ et } a_p \cdot b_q < 0. \end{cases}$$

exercice.

Pas de limite

forme indéterminée

$\lim v_n$ \ $\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
PL	PL	?	?	?

Tableau 1 : $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$

$\lim v_n$ \ $\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell = 0$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \cdot \ell'$	0	$\ell \cdot \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell' = 0$	0	0	0	?	?	?
$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell \cdot \ell'$	0	$\ell \cdot \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
PL	PL	?	PL	?	?	?

Tableau 2 : $\lim_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n)$

- Tableau symétrique grâce à la commutativité de + et ·.

1.3 Critères de convergence

Thm : (i) Toute suite (u_n) $\left\{\begin{matrix} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{matrix}\right\}$ et $\left\{\begin{matrix} \text{majorée} \\ \text{minorée} \end{matrix}\right\}$ converge vers $\left\{\begin{matrix} \sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\} \\ \inf\{u_n ; n \in \mathbb{N}\} \end{matrix}\right\}$.

(ii) Toute suite $\left\{\begin{matrix} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{matrix}\right\}$ non $\left\{\begin{matrix} \text{majorée} \\ \text{minorée} \end{matrix}\right\}$ tend vers $\left\{\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right\}$.

fin cours 23/09

Preuve :