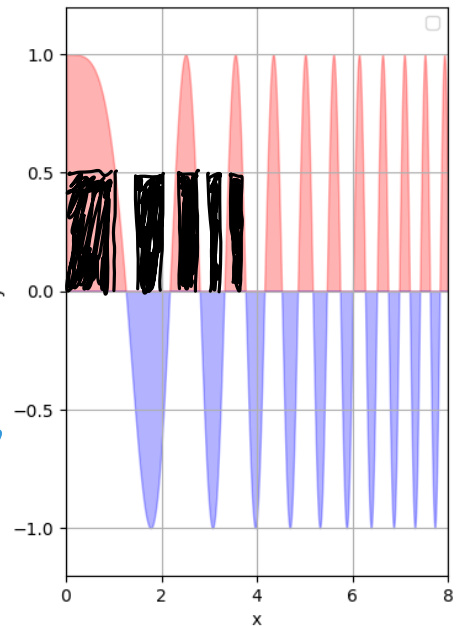


(ii) Nature de $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$?

$$\begin{aligned} \text{Pour } x > 1, \int_1^x \cos(u^2) du &= \int_1^x \frac{1}{u} \cdot \overbrace{u \cos(u^2)}^{g'} du \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{2u} \sin(u^2) \right]_1^x}_{\text{converge quand } x \rightarrow +\infty} - \underbrace{\int_1^x \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(u^2) du}_{\text{converge qd } x \rightarrow +\infty} \end{aligned}$$

Détail: car $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u^2)}{u^2} du$ absolument intégrable par comparaison avec $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$.

Donc $\int_1^{+\infty} \cos(u^2) du$ converge.



(iii') Montrons que $\int_1^{+\infty} |\cos(u^2)| du$ diverge

$u \rightarrow |\cos(u^2)|$ atteint son maximum en $\sqrt{k\pi}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

et $|\cos(u^2)| \geq \frac{1}{2}$, $\forall u \in [\sqrt{k\pi - \frac{\pi}{3}}, \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{3}}] = I_k$, $k \in \mathbb{N}^*$

Chaque segment I_k a pour longueur:

$$\begin{aligned} |I_k| &= \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{3}} - \sqrt{k\pi - \frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{k\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{3k}} - \sqrt{1 - \frac{1}{3k}} \right) \quad \left(\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \right) \\ &= \sqrt{k\pi} \left(1 + \frac{1}{6k} - \left(1 - \frac{1}{6k} \right) + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) \quad (\text{quand } k \rightarrow +\infty) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{\sqrt{N\pi + \frac{\pi}{3}}} |\cos(u^2)| du \geq \sum_{k=1}^N |I_k| \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{par comparaison avec } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \cos(u^2) du$ n'est pas absolument convergente.

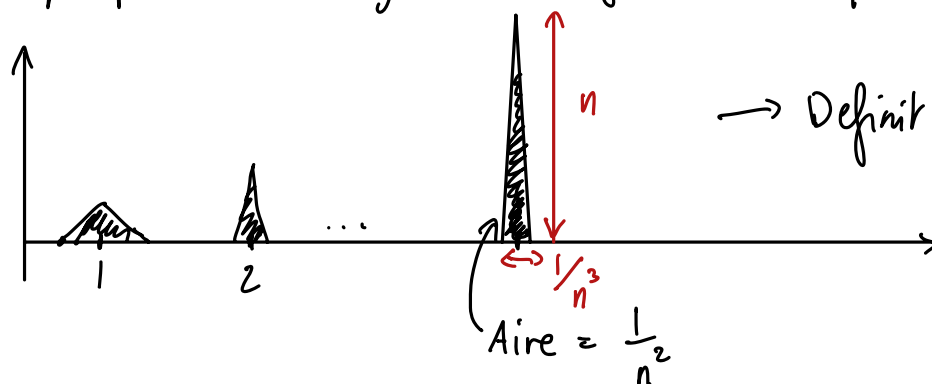
8.2.4 limite et intégrabilité en $+\infty$

Prop: Soit $f \in C^0([a, +\infty[)$ telle que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $l = 0$.

Preuve: Si $l > 0$, $\exists c > a$ t.q. $\forall x \geq c$, $f(x) \geq \frac{l}{2}$ et alors l'intégrale diverge par comparaison. Si $l < 0$, raisonne de même avec $-f$.

⚠ L'intégrabilité n'implique pas la convergence de f , ni même qu'elle soit bornée!

Contre-exemple:



$$\text{On a } \forall x > 0, \quad \int_0^x f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge même si f n'est pas bornée!

8.2.5 Comparaison séries-intégrales

Thm: Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $f \in C^0([n_0, +\infty[)$ décroissante et positive. Alors la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a :

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n).$$

Preuve: On a $\forall n \geq n_0$

Donc $\forall N \geq n_0$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$
$$\sum_{n=n_0}^N f(n+1) \leq \int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N f(n)$$

On conclut en remarquant que ces sommes / intégrales sont des fonctions croissantes
donc soit majorées et donc convergent
soit non majorées et donc divergent vers $+\infty$ (à détailler). ■

8.3 Intégrale généralisée aux deux bornes

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.

Def: On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ converge ssi $\exists c \in]a, b[$
tel que $\int_a^c f(x) dx$ converge et $\int_c^b f(x) dx$ converge. Dans ce cas, on
note : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Remarque: on vérifie aisément que la convergence et la valeur de l'intégrale
ne dépendent pas du choix de $c \in]a, b[$.

Exemples: (i) $\int_0^{+\infty} x^\alpha dx$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

En effet : $\begin{cases} \int_0^1 x^\alpha dx \text{ converge ssi } \alpha > -1 \\ \int_1^{+\infty} x^\alpha dx \text{ converge ssi } \alpha < -1 \end{cases}$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) dx$ diverge car $\int_0^{+\infty} \sin(x) dx$ diverge

(en effet $\int_0^x \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^x = 1 - \cos(x)$ diverge en $+\infty$)

Pourtant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^x \sin(t) dt = 0$

fin cours
←