- **Relation de Chasles** : Si $f \in C^0([a,b[)$ et $c \in [a,b[$ alors :

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx \text{ converge ssi } \int_c^{b^-} f(x)\,dx \text{ converge}$$

et alors on a $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{b^-} f(x)\,dx$

8.1.4 Critère de comparaison

Prop : Soit $f, g \in C^0([a,b[)$ telles que $\exists c \in [a,b[$ t.q

$$\forall x \in [c,b[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Alors :

(i) $\displaystyle\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ converge.

(ii) $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ diverge.

En pratique : vérifier $\begin{cases} f, g \geqslant 0 \\ f = O(g) \end{cases}$ au voisinage de b^-

suffit pour appliquer le critère.

[détail. cela implique $\exists c \in [a,b[$ et $K > 0$ t.q $\forall x \in [c,b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant K \cdot g(x)$.
or la nature de $\int_a^{b^-} Kg$ est la même que celle de $\int_a^{b^-} g$]

Preuve : (i) Supposons $\displaystyle\int_a^{b^-} g(x)\,dx$ converge. Alors $\displaystyle\int_c^{b^-} g(x)\,dx$ converge.

$$G : \left| \begin{array}{l} [c,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_c^x g(t)\,dt \end{array} \right.$$ est croissante sur $[c,b[$ car $g \geqslant 0$.

(en effet, $\forall c \leqslant x \leqslant y < b$ on a $G(y) - G(x) = \int_x^y g(t)\,dt \geqslant 0$)

Ainsi, $\displaystyle\sup_{x \in [c,b[} G(x) = \lim_{x \to b^-} G(x) = \int_c^{b^-} g(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

De même la fonction $F : \left| \begin{array}{l} [a,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array} \right.$ est croissante sur $[c,b[$.

On a alors : $\displaystyle F(x) = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt$

$$\leqslant \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x g(t)\,dt \leqslant \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^{b^-} g(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

Ainsi F est croissante sur $[c,b[$ et majorée donc $\lim_{x\to b-} F(x) \overset{\text{existe}}{\in} \mathbb{R}$.

(ii) Supposons que $\int_a^{b-} f(t)\,dt$ diverge et donc $\int_a^{b-} f(t)\,dt = +\infty$. Alors pour $x \in [c,b[$

$$\int_a^x g(t)\,dt \geqslant \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt \underset{x\to b-}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi $\lim_{x\to b-} \int_a^x g(t)\,dt = +\infty$ et l'intégrale diverge. $\blacksquare$

<u>Exemple</u> : $f : \begin{vmatrix} [0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} \end{vmatrix}$

<u>Rappel</u> : $1-x^n = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1})$

$= O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$ au voisinage de 1.

$$\forall x \in [0,1[, \quad 0 \leqslant f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Comme $\int_0^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, par comparaison, $\int_0^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge.

8.1.5 Intégrale généralisée absolument convergente

<u>Def</u> : Soit $f \in C^0([a,b[)$ $(a<b)$. On dit que $\int_a^{b-} f(t)\,dt$ est <u>absolument convergente</u> ssi $\int_a^{b-} |f(t)|\,dt$ est convergente.

<u>Prop</u> : Si $\int_a^{b-} f(t)\,dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et

$$\left|\int_a^{b-} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^{b-} |f(t)|\,dt.$$

<u>Preuve</u> : Par construction, on a $\begin{cases} 0 \leqslant \overbrace{f^+(x)}^{\max\{0,f(x)\}} \leqslant |f(x)| \\ 0 \leqslant \underbrace{f^-(x)}_{\max\{0,-f(x)\}} \leqslant |f(x)| \end{cases}$ $\forall x \in [a,b[$.

Donc par le critère de comparaison, les deux intégrales

$$\int_a^{b-} f^+(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} f^-(x)\,dx \quad \text{convergent.}$$

D'autre part $f = f^+ - f^-$ et donc par linéarité de la limite :

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f^+(t)\,dt - \lim_{x \to b^-} \int_a^x f^-(t)\,dt \in \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

Prop: Si $f \in C^0([a,b[)$ est bornée alors $\int_a^{b^-} f(t)\,dt$ converge absolument.

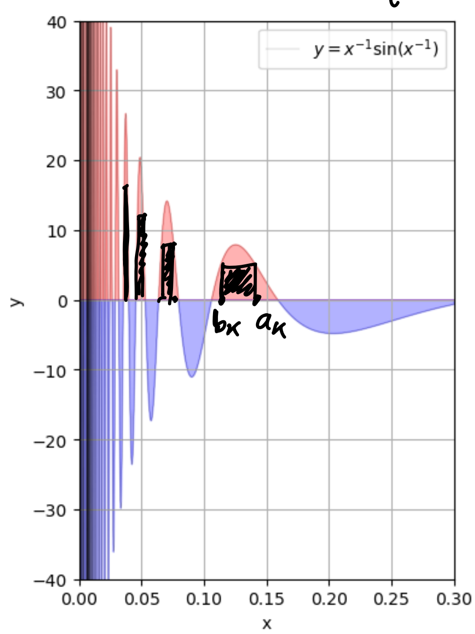
Preuve: Posons $M = \sup_{x \in [a,b[} |f(x)|$. On a $\forall x \in [a,b[$, $\int_a^x |f(t)|\,dt \leq M \cdot (b-a)$.

ce qui implique que $\int_a^{b^-} |f(t)|\,dt$ converge $\blacksquare$

Exemples:

(i) l'intégrale $\int_{0^+}^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ converge absolument (car $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ bornée)

(ii) Est-ce que $\int_{0^+}^1 \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ convergente ?



Etudions pour $x \in]0,1]$:

$$\int_x^1 \overbrace{t}^{g} \cdot \overbrace{\frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right)}^{f'} dt \overset{IPP}{=} \underbrace{\left[t \cdot \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right]_x^1}_{\text{converge qd } x \to 0^+ \text{ vers } \cos(1)} - \underbrace{\int_x^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt}_{\text{converge qd } x \to 0^+ \text{ car } t \mapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right) \text{ bornée.}}$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ converge.

(ii') Converge-t-elle absolument?

On remarque que $|\sin(x)| \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{N}$

On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{1}{2k\pi + \pi/6}$, $b_k = \dfrac{1}{2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$.

Alors on a $0 \leq b_k \leq a_k \leq 1$ et $\forall t \in [b_k, a_k]$, $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \geq \frac{1}{2}$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

aire des rectangles noirs $\left(\min_{t \in [b_k, a_k]} \frac{1}{t}\right) \cdot (a_k - b_k)$

$$\int_{b_N}^{1} \frac{|\sin(\frac{1}{t})|}{t} dt \geqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{b_k}^{a_k} \frac{1}{2} \frac{1}{t} dt \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k - b_k}{a_k}$$

or $$\frac{a_k - b_k}{a_k} = 1 - \frac{b_k}{a_k} = 1 - \frac{2k + 1/6}{2k + 5/6} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{12k}}{1 + \frac{5}{12k}}$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{1}{12k}\right)\left(1 - \frac{5}{12k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

(on utilise : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ qd $x \to 0$ avec $x = \frac{5}{12k}$)

$$= \frac{5}{12k} - \frac{1}{12k} + o\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{3k} + o\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{3k}(1 + o(1))$$ ($\geqslant \frac{1}{6k}$ pour k assez grand)

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge, on en déduit que $\int_{b_N}^{1} \frac{|\sin(\frac{1}{t})|}{t} dt \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$

Ainsi $\int_{0^+}^{1} \frac{|\sin(\frac{1}{t})|}{t} dt$ diverge.

→ En conclusion $\int_{0^+}^{1} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t} dt$ est semi-convergente : elle converge mais ne converge pas absolument.

8.2 Intégrales généralisées en $\pm\infty$

8.2.1 Définitions

Soit $f \in C^0([a, +\infty[)$ et $F : \begin{cases} [a, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt \end{cases}$

Def :
- Si $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$ on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut ℓ.
- Sinon on dit que l'intégrale diverge.
- On dit que l'intégrale converge absolument si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

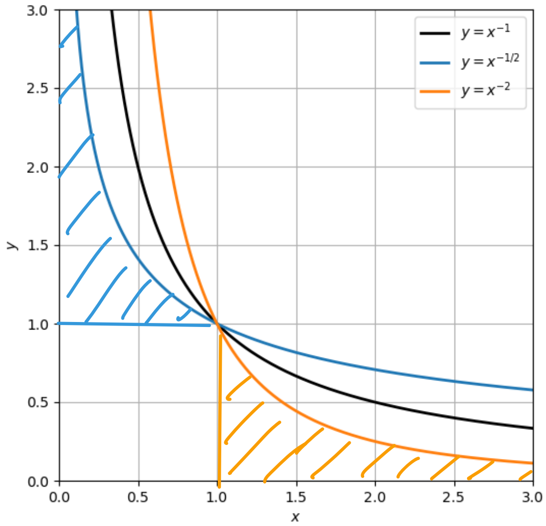
(définitions analogues pour $\int_{-\infty}^{a} f(t) dt$).

8.2.2 Exemple fondamental

Pour $0 < a \leq x$, on a $\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^x & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\log(t)\right]_a^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

On en déduit que :

> L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$
>
> Rappel : $\displaystyle\int_{0^+}^{a} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$



$< +\infty$

8.2.3 Quelques propriétés

Les propriétés suivantes s'énoncent et se démontrent de manière analogue à la section précédente :

- linéarité
- préservation de l'ordre
- la convergence absolue implique la convergence
- critère de comparaison.

Exemple :

(i) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$?

DL en 0 de arctan : $\arctan(u) = u + o(u)$ lorsque $u \to 0$

donc $\arctan\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2}\left(1 + o(1)\right)$ lorsque $t \to +\infty$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge.

Fin 11/12