

Def : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. extrémités bornes de l'intervalle.

Intervalle ouvert $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$

Intervalle fermé $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$

Intervalle semi-ouvert $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}$.

(ou $]a, b]$ de manière analogue.

Si $a = b$, $[a, a] = \{a\}$ "singleton a"

et $]a, a[= \emptyset$ ensemble vide.

Cas particuliers : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leq x\}$

$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} ; 0 \geq x\}$

Aussi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 0\}$ (pas un intervalle).

De même on définit $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, etc.

fin cours 09/09

0.3 Axiome de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non-vide).

Def : On dit que $b \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$) est un majorant (resp. minorant) de A si $\forall x \in A$, $x \leq b$ (resp. $\forall x \in A$, $x \geq a$).

Def : On dit que

- A est majoré s'il admet un majorant.

- A est minoré _____ un minorant.

- A est borné _____ un majorant et un minorant.

Def : S'il existe $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $M \geq x$, on dit que M est le maximum de A .
_____ $m \in A$ tel que $\forall x \in A$, $m \leq x$, _____ m est le minimum de A .

On note : $M = \max(A)$ et $m = \min(A)$.

Exemple: $A =]0, 1] \cup \{\pi\}$: borné, pas de minimum, $\max(A) = \pi$
 $A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$: borné, $\max(A) = 1$, pas de minimum.

Rmq (unicité) : Si le maximum de A existe alors il est unique.

En effet, soient $\pi, \pi' \in A$ deux maxima de A .

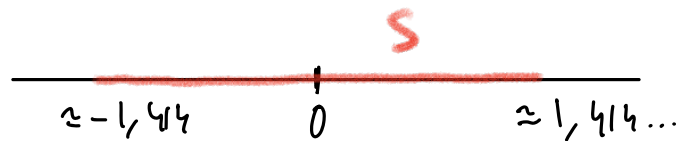
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Comme } \pi \in A, \text{ et } \pi' = \max(A), \text{ on a } \pi \leq \pi' \\ \text{--- } \pi' \in A, \text{ et } \pi = \max(A), \text{ on a } \pi' \leq \pi \end{array} \right. \quad \text{donc } \pi = \pi'.$

Def : S'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :
• b est un majorant de A .
• $\forall b'$ majorant de A , on a $b \leq b'$.
Alors on dit que b est le supremum de A , noté $b = \sup(A)$.
la borne supérieure

Rmq (unicité) : Quand $\sup(A)$ existe, on a $\sup(A) = \min \{x \in \mathbb{R} ; x \text{ majorant de } A\}$
donc $\sup(A)$ est unique par unicité du minimum.

Def : S'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :
• b est un minorant de A .
• $\forall b'$ minorant de A , on a $b \geq b'$.
Alors on dit que b est l'infimum de A , noté $b = \inf(A)$.
la borne inférieure

$$S = \{x \in \mathbb{Q} ; x^2 \leq 2\}$$



$\sup S = \begin{cases} \text{n'existe pas dans } \mathbb{Q}. \\ \text{existe dans } \mathbb{R} \text{ par l'axiome 3 :} \end{cases}$

Axiome 3 : Tout ensemble non vide majoré $A \subset \mathbb{R}$ admet un supremum dans $\mathbb{R}$.

En considérant $-A = \{x \in \mathbb{R} ; -x \in A\}$, on obtient aussi

Prop : soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide minoré, alors $\inf(A)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Proposition (caractérisation analytique du sup). Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Alors

$\alpha = \sup(A)$ ssi (si et seulement si) :

(i) α est un majorant de A

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x$.

⚠ l'ordre des quantificateurs ($\exists, \forall$) est important.

Exo: écrire la proposition analogue pour l'infimum.

Preuve:

► Soit $\alpha = \sup A$. alors :

• (i) fait déjà partie de la def.

• Pour (ii), soit $\varepsilon > 0$:

Comme $\alpha - \varepsilon < \alpha$, on a: $\alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A .

donc $\exists x \in A, x > \alpha - \varepsilon$. donc (ii) est vraie.

► Réciproquement, supposons α satisfait (i) et (ii).

Par (i), α est un majorant de A ; montrons que c'est le plus petit.

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta < \alpha$.

Par (ii), avec $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$, on a $\exists x \in A, x > \alpha - \varepsilon = \alpha - (\alpha - \beta) = \beta$

Donc β n'est pas un majorant de A : α est bien le plus petit majorant.

Donc $\alpha = \sup(A)$

0.4. Propriété d'Archimède, partie entière

Thm: $\mathbb{R}$ est un corps archimédien, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété d'Archimède:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } nx > y.$$

Interprétation: "on peut vider l'océan à la petite cuillère"

Exemple de corps non archimédien: le corps des fractions rationnelles...

Preuve: Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, et supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $nx \leq y$
Soit $E = \{ nx ; n \in \mathbb{N} \}$. E est non vide et majoré donc $\sup E$ existe dans $\mathbb{R}$; soit $b = \sup(E)$.

Par la caractérisation du sup $\rightarrow$ On a $b - x$ n'est pas un majorant de E donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > b - x \Leftrightarrow b < (n+1)x$

Comme $(n+1)x \in E$ on a une contradiction. Donc

$\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$ (et $n \neq 0$). ■

En appliquant ce thm avec $x=1$ on a $\{n \in \mathbb{Z}; n \leq y\}$ est non-vide et majoré donc admet un maximum dans $\mathbb{Z}$ (propriété de $\mathbb{Z}$). On obtient :

Prop/Def: $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leq y < n+1$.

On note $n = \lfloor y \rfloor$ ou $n = E(y)$ et on l'appelle partie entière de y .

Ex: $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -1, 1 \rfloor = -2$

O. S. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Def (densité). $A \subset \mathbb{R}$ est dit dense dans $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ , } (x < y \Rightarrow (\exists a \in A, x < a < y))$$

Thm: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve: Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \cdot (y - x) > 1$ c-à-d $y - x > \frac{1}{n}$.

Soit $r = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \in \mathbb{Q}$ (Rappel: $\lfloor nx \rfloor \leq nx \leq \lfloor nx \rfloor + 1$)

Alors $x < r = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + y - x = y$ ■

Rmq: L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

En effet: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, $\exists q \in \mathbb{Q}^*$ tel que $\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$ (densité de $\mathbb{Q}^*$)

Donc $x < \sqrt{2} \cdot q < y$ et $\sqrt{2} \cdot q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ■

fin cours 11/09